



TESIS - SF 142502

**ANALISIS METODE LINTASAN FEYNMAN  
PADA INTERFERENSI 1, 2, 3 DAN 4 CELAH**

**MAHENDRA SATRIA HADININGRAT**  
1112 201 021

**DOSEN PEMBIMBING**  
Endarko, Ph.D  
Dr.rer.nat, Bintoro Anang Subagyo

**PROGRAM MAGISTER  
BIDANG KEAHLIAN FISIKA TEORI  
JURUSAN FISIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER  
SURABAYA  
2015**



THESIS - SF 142502

# ANALYSIS OF FEYNMAN PATH METHOD ON 1, 2, 3 AND 4 SLITS INTERFERENCE

MAHENDRA SATRIA HADININGRAT  
1112 201 021

ADVISOR  
Endarko, Ph.D  
Dr.rer.nat, Bintoro Anang Subagyo

MAGISTER PROGRAMME  
ADVANCED IN THEORETICAL PHYSICS  
DEPARTMENT OF PHYSICS  
FACULTY OF MATHEMATICS AND SCIENCES  
SEPULUH NOPEMBER INSTITUTE OF TECHNOLOGY  
SURABAYA  
2015

## LEMBAR PENGESAHAN TESIS

Tesis disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar

Magister Sains (M.Si)

di

Institut Teknologi Sepuluh Nopember

oleh :

Mahendra Satria Hadiningrat

NRP. 1112201021

Hari/ Tanggal Ujian : Kamis, 15 Januari 2015

Periode Wisuda : 2014/2015

Disetujui oleh :

1. Endarko, Ph.D  
NIP. 19741117 199903 1 001

  
(Pembimbing)


2. Dr.rer.nat, Bintoro Anang Subagyo  
NIP. 19790716 200501 1 002

  
(Pembimbing)

3. Prof. Eddy Yahya, M.Sc., Ph.D  
NIP. 19471126 197210 1 001

  
(Penguji)

4. Prof. Suminar Pratapa, M.Sc., Ph.D  
NIP. 19660224 199002 1 001

  
(Penguji)

Direktur Program Pascasarjana,



Prof. Dr. Ir. Adi Soeprijanto, M.T  
NIP. 19640405 199002 1 001



# ANALISIS METODE LINTASAN FEYNMAN PADA INTERFERENSI 1, 2, 3 DAN 4 CELAH

Nama Mahasiswa : Mahendra Satria Hadiningrat  
NRP : 1112201021  
Jurusan/ Bidang Keahlian : Fisika FMIPA ITS/ Fisika Teori  
Dosen Pembimbing : 1. Endarko, Ph.D  
2. Dr.rer.nat Bintoro Anang Subagyo

## Abstrak

*Telah didapat solusi analitik interferensi 1, 2, 3 dan 4 celah berdasar metode Integral Lintas Feynman dengan pendekatan difraksi Fraunhofer. Penurunan formula tersebut sangat detail, oleh karena itu, secara lebih sederhana diaplikasikan Prinsip aksi klasik sebagai dasar awal penurunan formula tersebut. Metode ini digunakan untuk menghitung distribusi probabilitas partikel elektron yang mungkin melewati 1, 2, 3 dan 4 celah sebagai hasil dari pola interferensi yang terdeteksi pada layar dan direpresentasikan dalam grafik.*

*Kata kunci : Difraksi Fraunhofer, Integral Lintas Feynman.*





## ANALYSIS OF FEYNMAN PATH METHOD ON 1, 2, 3 AND 4 SLITS INTERFERENCE

Name : Mahendra Satria Hadiningrat  
NRP : 1112201021  
Department/ Advanced in : Physics FMIPA ITS/ Theoretical Physics  
Advisor : 1. Endarko, Ph.D  
2. Dr.rer.nat Bintoro Anang Subagyo

### Abstract

*It had been explained in analytical detail of interference on 1, 2, 3 and 4 slits which is based on Feynman Path Method within the Fraunhofer diffraction approachment. Those formulas are difficult to derive, thereafter, in simply design being applicated on classical action principle as a basic of deriving formula. It is used to compute probability distribution of electron through those slits as a result of interference model which is detected on a screen and represented on graph.*

**Keyword :** *Fraunhofer Diffraction, Feynman Path Method.*



## KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadiran Allah SWT yang telah memberikan berkah dan hidayah-NYA sehingga Tesis ini dapat terselesaikan, dengan judul :

### **“ANALISIS METODE LINTASAN FEYNMAN PADA INTERFERENSI 1, 2, 3 DAN 4 CELAH”**

Hanya dengan rahmat-NYA lah tugas berat dapat teratasi. Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih kepada berbagai pihak, karena tanpa bantuan dan dukungannya tidak akan mungkin karya tulis ini dapat terselesaikan. Pada kesempatan ini pula penulis ingin menyampaikan rasa terima kasih yang tak terhingga kepada :

1. Ayah Bunda di Surabaya, yang telah menghibahkan hidupnya pada ananda.
2. Pihak ITS atas pemberian Beasiswa Pendidikan PPA (Peningkatan Prestasi Akademik) selama S1 dan Beasiswa Pendidikan Freshgraduate selama S2.
3. Bapak Endarko, Ph.D dan Bapak Dr.rer.nat, Bintoro Anang Subagyo., selaku Pembimbing yang telah dengan tekun membimbing, memberikan arahan jalan keluar dari masalah yang penulis temui dari awal proposal, sabar memahami, memberikan rangsangan, tantangan sehingga termotivasi sampai terselesaikannya tugas ini, terima kasih penulis sampaikan.
4. Bapak Dr.Yono Hadi Pramono, M.Eng., selaku Ketua Jurusan. Terima kasih atas segala kepercayaan yang diberikan pada penulis.
5. Bapak Prof. Eddy Yahya, M.Sc, Ph.D dan Bapak Prof. Suminar Pratapa, M.Sc, Ph.D., atas bimbingannya selaku Penguji.
6. Bapak Drs.Ali Yunus Rohedi, MT., atas bantuan ilmu brilliant yang diberikan serta segala motivasi.
7. Bapak Dr.rer.nat, Triwikantoro, M.Sc., Bapak M.Arief Bustomi, M.Si., Ibu Susilo Indrawati, M.Si., dan Bapak Gatut Yudoyono, MT., atas segala motivasi yang diberikan dalam model pembelajaran berkarakter selama penulis menjadi Asisten Dosen Mata Kuliah Fisika Dasar.
8. Bpk/ Ibu Dosen yang telah memberikan arahan ilmu yang sangat berguna dalam penulisan tugas akhir ini, serta dalam pengembangan ilmu selanjutnya, terima kasih penulis sampaikan.
9. Bapak Karyono, S.Pd, M.MPd., selaku Kepala Sekolah SMP Negeri 3 Peterongan (RSBI)-Pondok Pesantren Darul ‘Ulum Peterongan, yang sampai sekarang mempercayakan kepada Penulis untuk membina Olimpiade Fisika tingkat Nasional.



10. Bapak Drs. Adi Sri O, M.Pd., selaku Kepala Sekolah SMP Negeri 3 Krian (SSN), yang sampai sekarang mempercayakan kepada Penulis untuk membina Olimpiade Fisika tingkat Nasional.
11. Ibu Anik, S.Pd dan Ibu Mala, S.Pd., selaku Pembimbing Bahasa Jepang UPT Bahasa dan Budaya ITS, atas motivasi, kritik, saran yang membangun bagi kesuksesan penulis selanjutnya.
12. Ibu Uda Hertriastuti, S.Pd (Almh.), selaku Guru Fisika SMA, sebagai Pencipta Ide Cerdas yang diberikan kepada penulis selama mengikuti berbagai tahapan Olimpiade Fisika yang cukup rumit, agar penulis memiliki kompetensi tinggi dalam bidang Fisika khususnya yang dapat dijanjikan dalam skala nasional/ internasional, terima kasih penulis sampaikan.
13. Ibu Fatmawati, S.Pd., selaku Guru Fisika SMP, sebagai Motivator yang diberikan kepada penulis selama mengikuti berbagai tahapan Olimpiade Fisika yang cukup melelahkan, terima kasih penulis sampaikan.
14. Sahabat-sahabat ku selama Program Magister yang selama ini berdialog dan berdiskusi sehingga berkembangnya penalaran penulis, terima kasih penulis sampaikan.
15. Sahabat-sahabat Spektrum 2008, atas segala motivasinya.
16. Sahabatku, Rizqon Natullah, S.Si, Eta Wahana P, S.Si, MbK Fitriana Richa H, S.Si, Agus Choirul Arifin, S.Si, Nur Aini, S.Si, atas segala motivasi yang selalu memberikan semangat tanpa lelah pada penulis, terima kasih sahabatku.
17. Teman-teman Organisasi IFLS (ITS Foreign Language Society), MbK Aini R, MbK Putu Ayu G, MbK Adistra W, Mas Dimitrij Nikita A, Galih Senja TAB, Fahmi N.H, A.Mustofa, Laeila M dan M.Arif R, yang senantiasa memberikan perhatiannya untuk kesuksesan penulis.

Atas segala kekurangan dan keterbatasan dalam penulisan karya ini, penulis berharap untuk dimaklumi. Semoga rangkaian kata dan simbol dalam karya ini bermanfaat untuk kemajuan fisika teori di masa mendatang.

Surabaya, 5 Januari 2015

**Penulis**



<b>DAFTAR ISI</b>	
<b>HALAMAN SAMPUL</b>	iii
<b>LEMBAR PENGESAHAN</b>	iv
<b>ABSTRAK</b>	v
<b>KATA PENGANTAR</b>	vi
<b>DAFTAR ISI</b>	vii
<b>1 PENDAHULUAN</b>	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang . . . . .	1
1.2 Perumusan Masalah . . . . .	4
1.3 Tujuan . . . . .	4
1.4 Sistematika Penulisan . . . . .	4
<b>2 METODE KONVENSIONAL</b>	<b>5</b>
2.1 Interferensi Kuantum . . . . .	5
2.2 Hamburan 1 Celah Sempit . . . . .	6
2.3 Hamburan 2 Celah Sempit . . . . .	7
2.4 Hamburan 1 Celah dengan lebar tertentu . . . . .	8
2.5 Hamburan N Celah dengan lebar tertentu . . . . .	9
2.5.1 Hamburan 2 Celah. . . . .	9
2.5.2 Hamburan 3 Celah. . . . .	11
2.5.3 Hamburan 4 Celah . . . . .	11
<b>3 FORMULASI FEYNMAN</b>	<b>13</b>
3.1 Eksperimen Kuantum Young . . . . .	17
3.1.1 Interferensi Kuantum . . . . .	18
3.1.2 Keadaan Koherensi . . . . .	19
3.2 Penerapan Difraksi dan Interferensi . . . . .	19
3.3 Distribusi Probabilitas dalam Suku Integral Fresnel . . . . .	20
3.4 Perumusan Interferensi dan Difraksi Dua Celah . . . . .	24
<b>4 HASIL DAN PEMBAHASAN</b>	<b>25</b>
<b>5 KESIMPULAN</b>	<b>29</b>
<b>DAFTAR PUSTAKA</b>	<b>31</b>
<b>LAMPIRAN</b>	<b>33</b>



## BAB 1

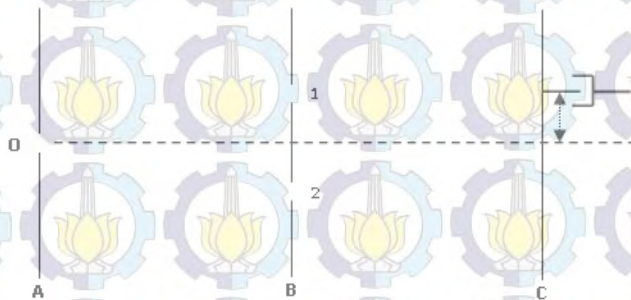
### PENDAHULUAN

#### 1.1 Latar Belakang

Thomas Young (1773-1829) menunjukkan eksperimen terkenalnya yaitu difraksi celah ganda menggunakan sumber sinar monokromatik, sinar tersebut masuk melalui 2 celah sempit dan diteruskan sampai ke layar. Eksperimen tersebut memperlihatkan pola interferensi (terang-gelap) pada layar. Efek interferensi ini dijelaskan dalam kerangka optika klasik melalui prinsip Huygens-Fresnel. Prinsip ini memberikan penjelasan detail tentang proses difraksi dimana tiap celah diterapkan penjalaran gelombang sferis (Banerjee, P., Poon, T.C, 1991).

Eksperimen ini merupakan teori tentang cahaya dan materi (*wave-particle dualism*), dimana tidak bisa dijelaskan secara bersamaan fenomena difraksi celah ganda dan dualisme tersebut, bergantung pada tinjauannya. Untuk mendeskripsikan eksperimen ini, konsep mekanika kuantum diterapkan, salah satunya adalah fenomena perjalanan partikel terhambur, misalnya elektron atau foton. Penjelasan detail mengenai pola terang gelap yang terdeteksi pada layar dianalogikan sebagai distribusi probabilitas kuantumik. Dasar untuk menjawab pertanyaan tersebut adalah dengan metode lintasan Feynman (Feynman, R.P., Hibbs, A.R, 1960). Set eksperimen yang berhubungan dengan terhamburnya partikel adalah fenomena interferensi celah ganda seperti pada Gambar (1.1)

Partikel terhambur di O sebelum mencapai detektor di y yang bergerak sam-

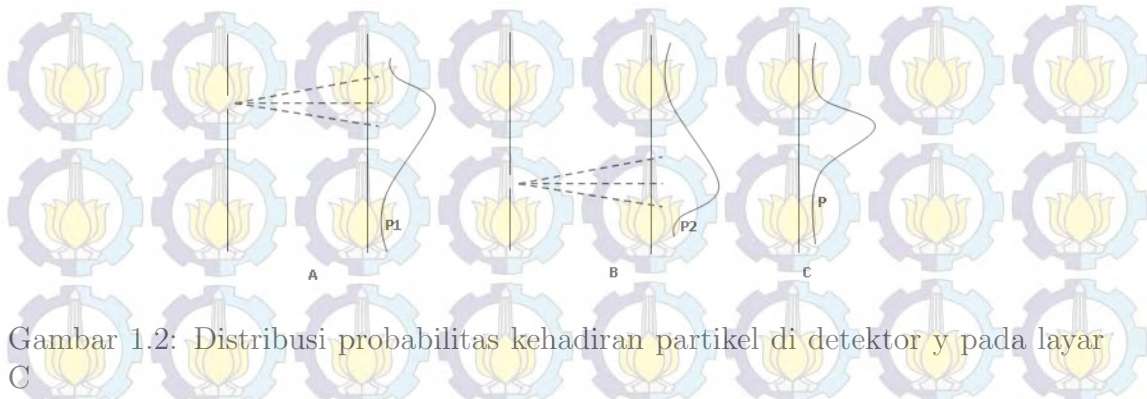


Gambar 1.1: Set eksperimen interferensi celah ganda

pai ke layar C, partikel bergerak melalui celai 1 dan 2 dengan asumsi sebagai berikut :

- Jika celah 2 ditutup, partikel hanya melewati celah 1 maka distribusi probabilitas partikel yang tercatat pada layar C adalah  $P_1$  (Gambar (1.2A)),
- Jika celah 1 ditutup, partikel hanya melewati celah 2, maka distribusi probabilitas partikel yang tercatat pada layar C adalah  $P_2$  (Gambar (1.2B)).





Gambar 1.2: Distribusi probabilitas kehadiran partikel di detektor y pada layar C

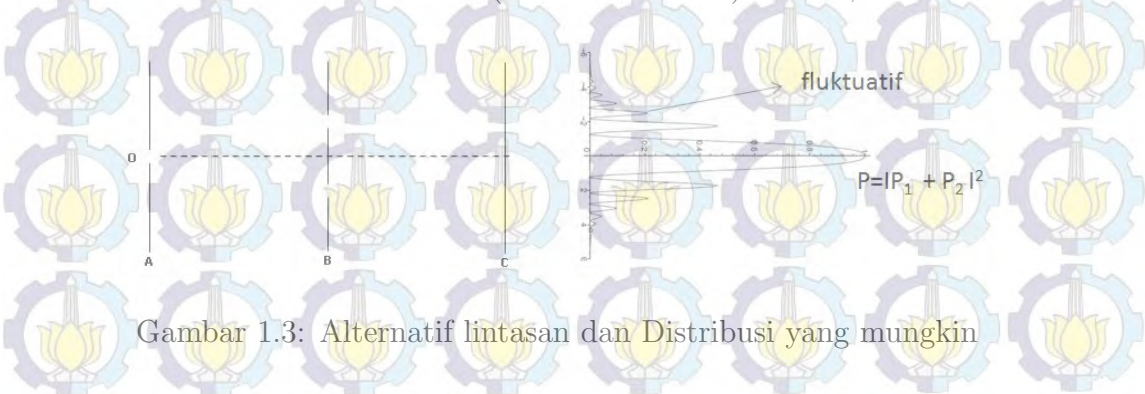
Dari pernyataan di atas bahwa jika celah 1 dan 2 dibuka maka distribusi probabilitas partikel pada layar c merupakan jumlahan  $P = P_1 + P_2$  dan membentuk kurva seperti pada Gambar (1.2C).

Namun, kenyataan secara eksperimen yang teramati tidak demikian  $P \neq P_1 + P_2$ , melainkan terdapat fluktuasi dari distribusi partikel yang tertangkap di detektor pada layar C sesuai Gambar (1.3). Fenomena ini menunjukkan bahwa trayektori partikel dari sumber O menuju detektor mempunyai banyak (alternatif) lintasan seperti pada Gambar (1.3), bahkan ada yang bergerak zig-zag diantara layar A dan B sebelum mencapai layar c. Lintasan-lintasan inilah yang menggugah inspirasi Feynman untuk mempermudah formulasi pendahulunya dan bermakna lebih fisis[5].

Konsep ini sangat menarik karena menganalisa alternatif lintasan/ perjalanan partikel yang mungkin dan distribusi probabilitas partikel sebagai pembentuk pola interferensi, namun menimbulkan pertanyaan : apa yang terjadi jika lebih dari 2 celah? Apakah ada batasan berapa besar probabilitas partikel melewati lebih dari 2 celah? Untuk menjawab semua keraguan di atas, terlebih dahulu dijabarkan sifat utama dari metode Feynman ini.

Metode integral lintas Feynman adalah integral yang faktor-fasenya merupakan fungsional trayektori antara titik awal dan akhir. Metode ini merupakan metode terbaru dari metode pendahulu (konvensional), yakni Metode Kanonik. Ada beberapa hal yang melatarbelakangi pemilihan metode yang terbaru untuk menghitung Distribusi probabilitas atau dapat juga disebut Intensitas dalam keadaan celah banyak. Berikut detail perbedaan antara Metode Konvensional dan Metode Terbaru (Feynman, R.P., Hibbs, A.R, 1965).

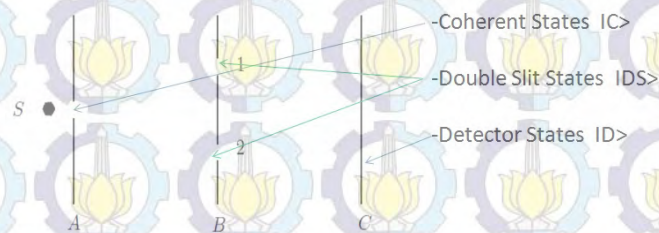
Ciri-ciri Metode Konvensional (Metode Kanonik) 2 celah;



Gambar 1.3: Alternatif lintasan dan Distribusi yang mungkin



- Konsep mekanika kuantum yang rumit (menggunakan dasar teori elektrodinamika klasik),
- Lebih matematis,
- Berdasarkan Postulat Born, digunakan untuk mendapatkan pola interferensi partikel terhambur dari sistem celah dengan teori gelombang klasik,
- Bergantung jumlah celah, keadaan koherensi dari sumber dan jarak antara celah dan layar (Gambar (1.4)),



Gambar 1.4: Ilustrasi keadaan interferensi

- Menggunakan Prinsip Superposisi dan diperoleh Distribusi probabilitas atau yang kita kenal disebut Intensitas sampai ke layar  $I = P = |A_1 + A_2|^2$ , dimana  $A_1$  dan  $A_2$  adalah amplitudo yang keluar dari masing-masing celah dan memenuhi  $A = \frac{i}{\text{const}} e^{\frac{i}{\hbar} p x}$  (konsep difraksi) yang tidak lain  $A$  disini adalah amplitudo penjalaran gelombang sferis,
- Mempertimbangkan waktu, posisi awal dan akhir.

Ciri-ciri Metode Terbaru (Metode Integral lintas Feynman) 2 celah;

- Konsep mekanika kuantum mudah (menggunakan dasar teori integral lintasan dengan teori matriks-S dan teori kali urut waktu sebagai teori pendukung),
- Bermakna lebih fisis,
- Tidak bergantung keadaan lebar celah, keadaan koherensi dari sumber dan jarak antara celah, layar. Namun bergantung pada jumlah celah yang akan berpengaruh pada distribusi probabilitasnya. Berdasarkan konsep Integral lintas (Feynman, R.P), Amplitudo gelombang atau Kernel (K, bahasa kuantum) adalah sebagai berikut

$$A = K = \text{const} \sum_{\text{seluruh lintasan}} e^{\frac{i}{\hbar} S[x(t)]} \approx \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\text{const}} \int \int \cdots \int e^{\frac{i}{\hbar} S[x(t)]} dx_1 \cdots dx_{N-1} \quad (1.1)$$



dimana  $S[x(t)]$  merupakan integral aksi, integral garis bernilai minimum

$$S[x(t)] = \int_{t_a}^{t_b} L(\dot{x}, x, t) dt \quad (1.2)$$

- Menggunakan Prinsip Superposisi dan diperoleh distribusi probabilitas atau yang kita kenal disebut Intensitas sampai ke layar  $I = P = |A_1 + A_2|^2$ , dimana  $A_1$  dan  $A_2$  adalah amplitudo yang keluar dari masing-masing celah 1 dan 2,
- Tidak mempertimbangkan waktu, posisi awal dan akhir. (del Campo A, 2004).

Dari kedua metode di atas, dengan mempertimbangkan kemudahan proses perhitungan dan analisisnya, dipilih Metode Integral lintas Feynman yang merupakan metode terbaru karena tidak bergantung waktu, tidak bergantung pada keadaan posisi awal dan akhir. Metode lintasan Feynman memiliki makna lebih fisis namun dari literatur yang ada belum mencakup sampai banyak celah, hanya sampai 2 celah yang dapat direpresentasikan sebagai fungsi dari intensitas. Penelitian yang dikembangkan adalah mencoba menghitung distribusi probabilitas partikel dari celah sampai ke layar yang mungkin dalam keadaan celah banyak menggunakan metode lintasan Feynman, kemudian direpresentasikan dalam gambar sebagai fungsi dari Intensitas.

Terlepas dari permasalahan kelebihan dan kekurangan antara kedua metode, integral lintas dan kanonik, maka pada penelitian ini diungkap peran metode integral lintas untuk beberapa sistem mekanika kuantum yang selanjutnya dimanfaatkan dalam mendapatkan distribusi probabilitas partikel pada interferensi celah banyak.

## 1.2 Perumusan Masalah

Perumusan masalah yang akan dilakukan dalam Tesis ini adalah bagaimana menganalisa perhitungan distribusi probabilitas atau biasa disebut Intensitas yang mungkin untuk 1, 2, 3 dan 4 celah dengan metode Integral Lintas Feynman serta merepresentasikannya dalam grafik.

## 1.3 Tujuan

Dalam Tesis ini akan dilakukan analisis Intensitas yang terhitung sebagai distribusi partikel yang mungkin dalam keadaan 1, 2, 3 dan 4 celah dengan metode Integral Lintas Feynman.

## 1.4 Sistematika Penulisan

Laporan tersusun atas Bab 1 Pendahuluan, Bab 2 Metode Konvensional, Bab 3 Formulasi Feynman, Bab 4 Hasil dan Pembahasan, Bab 5 Kesimpulan.



## BAB 1

### Metode Konvensional

Pada awal abad ke-19, eksperimen yang dilakukan oleh Thomas Young (Inggris) dan Augustin Fresnel (Prancis) memperlihatkan bahwa cahaya sebenarnya bergerak menembus ruang (atau medium transparan apapun) dalam bentuk gelombang. Hal ini dapat dibuktikan dengan jelas melalui eksperimen Young yang terkenal yaitu Eksperimen Dua Celah Young. Detail pemahaman konvensional Interferensi cahaya adalah perpaduan dari dua gelombang cahaya. Agar hasil interferensinya mempunyai pola yang teratur, kedua gelombang cahaya harus koheren, yaitu memiliki frekuensi dan amplitudo yang sama serta selisih fase tetap (Sanabria, H., Rodriguez-Lara, B.M., 2007). Hasil eksperimen ini sangat penting bagi kita untuk memahami fisika modern sehingga tidak ada salahnya melihat lebih dekat apa yang Young temukan. Pola hasil interferensi ini dapat ditangkap pada layar, yaitu

- Garis terang merupakan hasil interferensi maksimum (saling memperkuat atau konstruktif)
- Garis gelap merupakan hasil interferensi minimum (saling memperlemah atau destruktif)

Metode ini merupakan metode yang membutuhkan perhitungan lebih detail, dikarenakan mempertimbangkan keadaan jumlah celah serta distribusi probabilitas partikel sampai ke layar. Perhitungan probabilitas ini membutuhkan vektor keadaan  $|\psi\rangle$ , yang ditentukan melalui representasi sebagai berikut

$$|\psi\rangle = \sum |a_k\rangle \langle a_k | \psi \rangle \quad (1.1)$$

Vektor basis  $|a_k\rangle$  merupakan eigen vektor dari  $\hat{A}$ . Telah didapatkan vektor keadaan  $|\psi\rangle$ , maka probabilitas dari  $\hat{A}$  memenuhi postulat Born

$$P_k = |\langle a_k | \psi \rangle|^2 \quad (1.2)$$

dimana  $\psi$  adalah vektor keadaan,  $\langle a_k | \psi \rangle$  adalah distribusi probabilitas secara eksperimen.

Deskripsi mekanika kuantum untuk eksperimen dengan celah didefinisikan secara jelas terukur, ditentukan vektor keadaan, dan diperoleh distribusi probabilitas untuk partikel terhambur.

#### 1.1 Interferensi Kuantum

Diasumsikan set eksperimen Gambar (2.1), dengan penentuan koordinat  $y$  adalah keadaan celah. Kemudian vektor keadaan adalah keadaan posisinya. Partikel bergerak melalui celah dengan momentum direpresentasikan di komponen  $y$ ,



dengan nilai eigen momentum  $P_y = p \sin \theta$ ,  $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ . Pengukuran sudut  $\theta$  yang berhubungan dengan pengukuran  $\hat{P}_y$ , dengan vektor momentum  $|P_y\rangle$ .

Probabilitas partikel meninggalkan celah dengan momentum  $P_y$  adalah

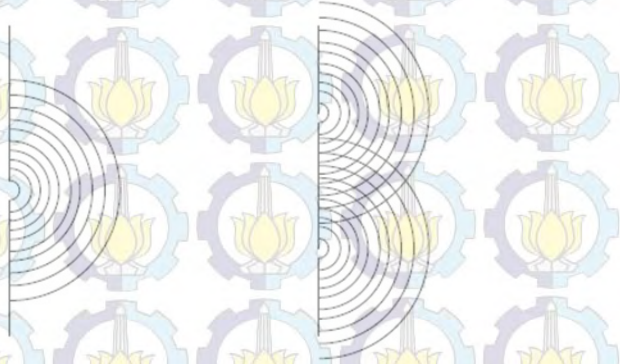
$$P(p_y) = |\langle p_y | \psi \rangle|^2 \quad (1.3)$$

Probabilitas ini menunjukkan distribusi partikel terhambur sampai ke layar atau disebut juga Interferensi serta mempunyai maksima dan minima atau interferensi konstruktif dan destruktif.

Dalam representasi posisi, momentum partikel dengan nilai eigen  $p_y$  (sama seperti amplitudo gelombang sferis)-(Gambar (2.1)) adalah

$$\langle y | p_y \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(p_y/\hbar)y} \quad (1.4)$$

dan probabilitas amplitudo terhambur dengan momentum  $p_y$  adalah



Gambar 1.1: Ilustrasi gelombang sferis

$$\begin{aligned} \langle p_y | \psi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \langle p_y | y \rangle \langle y | \psi \rangle dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(p_y/\hbar)y} \psi(y) dy \end{aligned} \quad (1.5)$$

Kita mengevaluasi integral pada persamaan di atas dengan membangun fungsi keadaan posisi  $\langle y | \psi \rangle = \psi(y)$ .

## 1.2 Hamburan 1 Celah Sempit

Sebuah celah dengan lebar kecil merupakan set pengukuran ideal dimana dapat menentukan posisi interferensi pada layar. Partikel bergerak melalui sebuah celah  $y = y_1$  di posisi  $|y_1\rangle$ . Dalam representasi posisi, fungsi eigen posisi merupakan fungsi delta Dirac

$$\psi(y) = \langle y | y_1 \rangle = \delta(y - y_1) \quad (1.6)$$



dan probabilitas amplitudo untuk partikel bergerak melalui celah dengan momentum  $p_y$  adalah

$$\begin{aligned}\langle p_y | \psi \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(p_y/\hbar)y} \delta(y - y_1) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i(p_y/\hbar)y_1}\end{aligned}\quad (1.7)$$

Sehingga distribusi probabilitas,

$$P(p_y) = |\langle p_y | \psi \rangle|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i(p_y/\hbar)y_1} \right|^2 = \text{konstan} \quad (1.8)$$

Persamaan di atas mendefinisikan partikel terhambur di sembarang sudut, dan tidak memunculkan interferensi.

### 1.3 Hamburan 2 Celah Sempit

Untuk set eksperimen 2 celah,  $\hat{y}$  mempunyai nilai eigen  $y_1$  dan  $y_2$ . Vektor keadaan merupakan superposisi dari vektor eigen posisi

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|y_1\rangle + |y_2\rangle) \quad (1.9)$$

dan

$$\psi(y) = \langle y | \psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\delta(y - y_1) + \delta(y - y_2)) \quad (1.10)$$

Disini, probabilitas menemukan partikel dengan momentum  $p_y$  adalah

$$\begin{aligned}\langle p_y | \psi \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(p_y/\hbar)y} \delta(y - y_1) dy + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(p_y/\hbar)y} \delta(y - y_2) dy \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} (e^{-i(p_y/\hbar)y_1} + e^{-i(p_y/\hbar)y_2})\end{aligned}\quad (1.11)$$

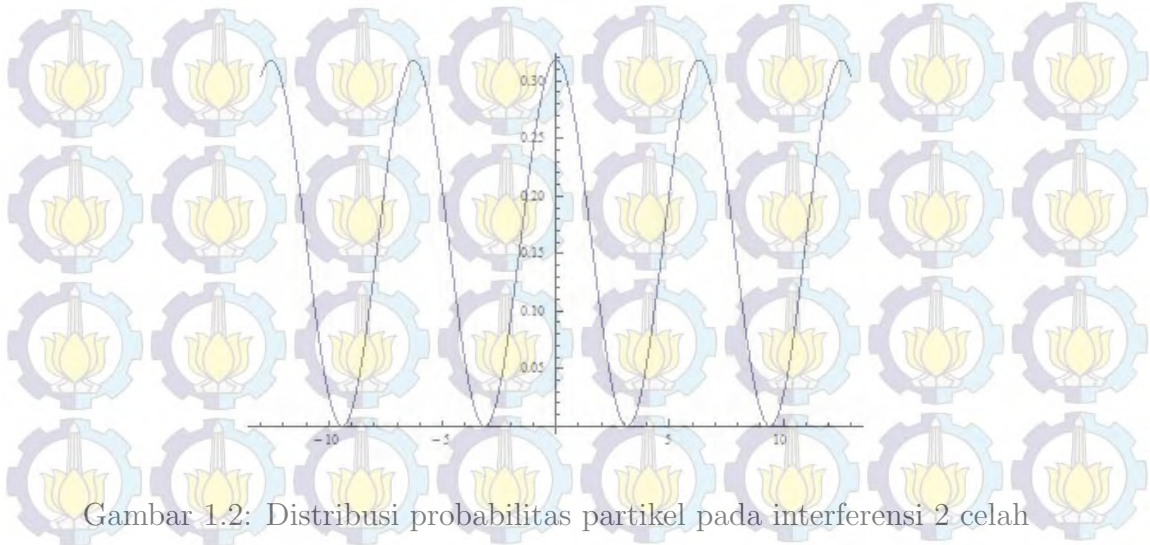
Kemudian diperoleh Distribusi probabilitas

$$\begin{aligned}P(p_y) = |\langle p_y | \psi \rangle|^2 &= \frac{1}{4\pi} (2 + e^{i(p_y/\hbar)(y_1 - y_2)} + e^{-i(p_y/\hbar)(y_1 - y_2)}) \\ &= \frac{1}{2\pi} (1 + \cos(p_y/\hbar)d)\end{aligned}\quad (1.12)$$

dimana  $d = y_1 - y_2$  adalah jarak antar celah. Kita melihat bahwa distribusi probabilitas mempunyai maksima dan minima relatif dan terjadi interferensi. Dengan menggunakan  $p_y = p \sin \theta$ , dan diperoleh distribusi sudut dari partikel terhambur

$$P(\theta) = \frac{1}{2\pi} (1 + \cos(pd \sin \theta/\hbar)) \quad (1.13)$$





Gambar 1.2: Distribusi probabilitas partikel pada interferensi 2 celah

Jika  $\phi = pd \sin \theta / \hbar$  dan menggunakan formula  $1 + \cos \phi = 2 \cos^2(\phi/2)$ , persamaan di atas dapat juga ditulis

$$P(\phi) = \frac{1}{\pi} \cos^2(\phi/2) \quad (1.14)$$

Persamaan distribusi probabilitas di atas dapat disebut juga distribusi Fraunhofer (Gambar (2.2)).

#### 1.4 Hamburan 1 Celah dengan Lebar Tertentu

Dalam bahasan ini, tidak bisa dibedakan antara nilai eigen posisi dan pergerakan partikel melalui celah dengan lebar  $a$  dimana dapat mempunyai nilai sembarang dari  $\hat{y}$ ,  $-a/2 \leq y \leq a/2$ . Diasumsikan probabilitasnya sama untuk sembarang titik, partikel masuk ke celah dengan superposisi

$$\begin{aligned} \psi(y) = \langle y | \psi \rangle &= \frac{1}{\sqrt{a}}, -a/2 \leq y \leq a/2 \\ &= 0, \text{ yang lain} \end{aligned} \quad (1.15)$$

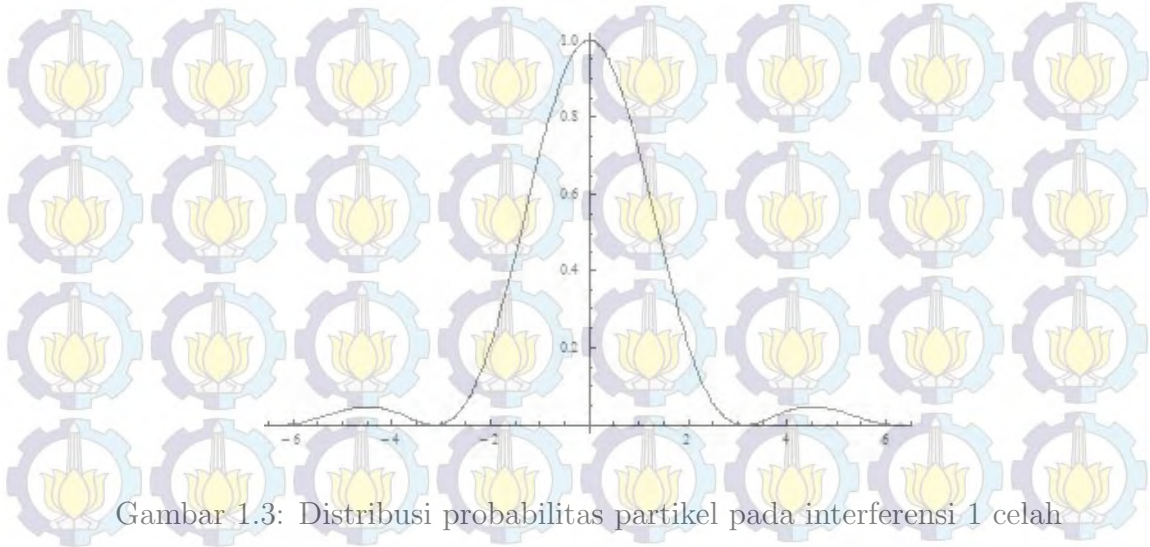
Disini, probabilitas amplitudonya

$$\begin{aligned} \langle p_y | \psi \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \int_{-a/2}^{a/2} e^{-ip_y y / \hbar} dy \\ &= \left( \frac{i\hbar}{p_y} \sqrt{2\pi a} \right) (e^{-iap_y/2\hbar} - e^{iap_y/2\hbar}) \\ &= \frac{1}{p_y} 2\hbar \sin(ap_y/2\hbar) \sqrt{2\pi a} \end{aligned} \quad (1.16)$$

Sehingga Distribusi probabilitas,

$$P(k_y) = |\langle k_y | \psi \rangle|^2 = \left( \frac{2}{\pi} a k_y^2 \right) \sin^2 \left( \frac{a k_y}{2} \right) \quad (1.17)$$





Gambar 1.3: Distribusi probabilitas partikel pada interferensi 1 celah

Hasil ini ditunjukkan dalam suku sudut terhambur  $\theta$  (gambar).  $P(p_y)$  adalah pola difraksi, jika  $\alpha = ap_y/2\hbar = ap \sin \theta/2\hbar$  maka dapat dituliskan kembali (seperti Gambar (2.3))

$$P(\alpha) = \left(\frac{a}{2\pi}\right) \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha}\right)^2 \quad (1.18)$$

## 1.5 Hamburan $N$ Celah dengan Lebar Tertentu

### 1.5.1 Hamburan 2 celah

Diasumsikan kembali, partikel bergerak melalui kedua celah masing-masing dengan lebar  $b$  (Gambar (2.4)). Deskripsi ini lebih realistis untuk eksperimen 2 celah. Didefinisikan vektor keadaan

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle) \quad (1.19)$$

dimana

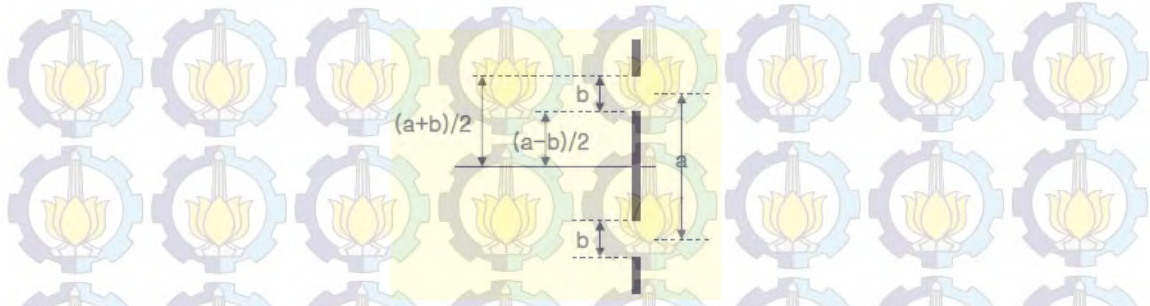
$$\begin{aligned} \langle y|\psi_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{a}}, y_1 - a/2 \leq y \leq y_1 + a/2 \\ &= 0, \text{yang lain} \end{aligned} \quad (1.20)$$

dan

$$\begin{aligned} \langle y|\psi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{a}}, y_2 - a/2 \leq y \leq y_2 + a/2 \\ &= 0, \text{yang lain} \end{aligned} \quad (1.21)$$

Kemudian kita menghitung amplitudo





Gambar 1.4: Set eksperimen 2 celah

$$\begin{aligned}
 \langle p_y | \psi \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle p_y | \psi_1 \rangle + \langle p_y | \psi_2 \rangle) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \left( \int_{y_1-a/2}^{y_1+a/2} e^{-ip_y y/\hbar} dy + \int_{y_2-a/2}^{y_2+a/2} e^{-ip_y y/\hbar} dy \right) \\
 &= \frac{i\hbar}{p_y} \sqrt{2\pi a} \\
 &\quad \left( e^{-ip_y(y_1+a/2)/\hbar} - e^{-ip_y(y_1-a/2)/\hbar} + e^{-ip_y(y_2+a/2)/\hbar} - e^{-ip_y(y_2-a/2)/\hbar} \right)
 \end{aligned} \tag{1.22}$$

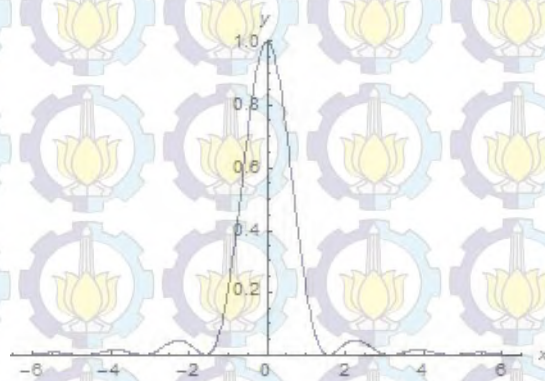
dengan penyederhanaan, menjadi

$$\langle p_y | \psi \rangle = 2\hbar \frac{(e^{-ip_y y_1/\hbar} + e^{-ip_y y_2/\hbar}) \sin(ap_y/2\hbar)}{p_y \sqrt{2\pi a}} \tag{1.23}$$

Sehingga distribusi probabilitasnya

$$P(p_y) = 4\hbar^2 \frac{(1 + \cos(p_y d/\hbar)) \sin^2(ap_y/2\hbar)}{\pi a p_y^2} \tag{1.24}$$

Dari pers. (2.24), jika  $\phi = pd \sin \theta/\hbar$  dan  $\alpha = ap \sin \theta/2\hbar$ , dapat dituliskan



Gambar 1.5: Distribusi probabilitas partikel pada interferensi 2 celah dengan lebar a



kembali menjadi (seperti Gambar (2.5))

$$P(\phi) = \frac{2a}{\pi} \cos^2 \left( \frac{\phi}{2} \right) \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \quad (1.25)$$

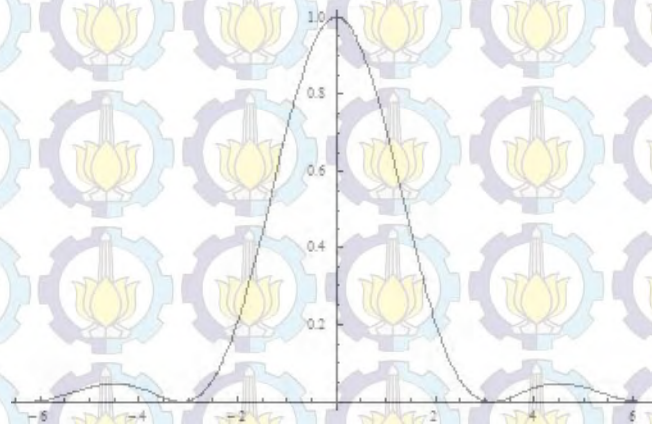
### 1.5.2 Hamburan 3 celah

Dengan cara yang sama, persamaan 2 celah diatas lebih lanjut diekspansikan

$$\begin{aligned} \langle p_y | \psi \rangle &= \sum_{j=1}^{N/2} \left( \int_{-(2j-1)(a-b)/2}^{-(2j-1)(a+b)/2} e^{iks \sin \theta} ds + \int_{(2j-1)(a-b)/2}^{(2j-1)(a+b)/2} e^{iks \sin \theta} ds \right) \\ &= \int_{-(a-b)}^{-(a+b)} e^{iks \sin \theta} ds + \int_{(a-b)}^{(a+b)} e^{iks \sin \theta} ds \\ &= \frac{4b}{2\beta} \sin(2\beta) \sin(2\alpha) \end{aligned} \quad (1.26)$$

Sehingga Distribusi probabilitas (seperti Gambar (2.6))

$$P(\alpha, \beta) = 16b^2 \left( \frac{\sin(2\beta)}{2\beta} \right)^2 \sin^2(2\alpha) \quad (1.27)$$



Gambar 1.6: Distribusi probabilitas partikel pada interferensi 3 celah dengan lebar a

### 1.5.3 Hamburan 4 celah

Seperti pada persamaan di atas diberikan

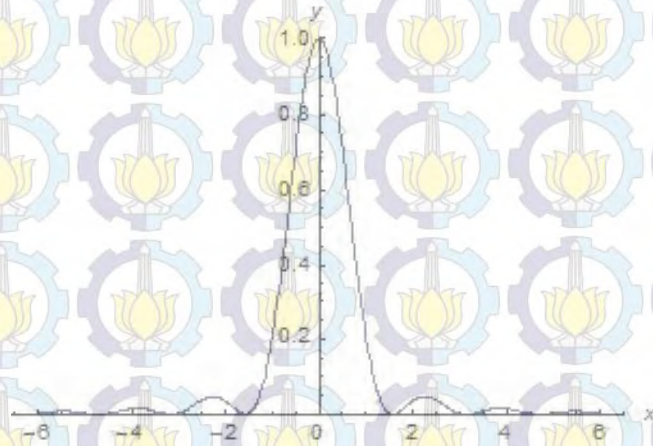
$$\begin{aligned} \langle p_y | \psi \rangle &= \int_{-3/2(a-b)}^{-3/2(a+b)} e^{iks \sin \theta} ds + \int_{3/2(a-b)}^{3/2(a+b)} e^{iks \sin \theta} ds \\ &= \frac{4b}{2\beta} \sin(3\beta) \sin(3\alpha) \end{aligned} \quad (1.28)$$



Sehingga Distribusi probabilitas (seperti gambar (2.7))

$$P(\alpha, \beta) = 16b^2 \left( \frac{\sin(3\beta)}{2\beta} \right)^2 \sin^2(3\alpha) \quad (1.29)$$

Dari uraian di atas, dapat disimpulkan, perhitungan Distribusi probabilitas



Gambar 1.7: Distribusi probabilitas partikel pada interferensi 4 celah dengan lebar  $a$

hamburan dengan banyak celah ( $N$  celah) adalah

$$P(\alpha, \beta) = 16b^2 \left( \frac{\sin((N-1)\beta)}{2\beta} \right)^2 \sin^2((N-1)\alpha) \quad (1.30)$$



# BAB 1

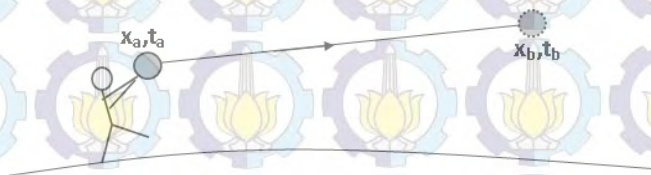
## FORMULASI FEYNMAN

Integral Lintas Feynman adalah kerangka untuk memformulasikan teori kuantum. Teori Integral tersebut dikembangkan pertama kali oleh P.A.M Dirac (1933) dan R.P Feynman (1948). Integral lintas merupakan dasar untuk menjelaskan teori kuantum, perumusan terakhir integral lintas sangat sederhana namun proses penurunan membutuhkan matematika rumit. Untuk menghindari permasalahan tersebut, diaplikasikan metode analisis fungsional karena kuantitas fundamental berdasarkan komutasi dari pada operator aljabar dan didasarkan pada Prinsip Aksi Klasik. Dari metode inilah aturan Feynman dapat disederhanakan dengan mudah.

Dalam bahasan ini, Integral lintas digunakan untuk menghitung interferensi gelombang (mekanika kuantum) dengan semua trayektori/alternatif lintasan yang mungkin. Salah satu cara standar untuk mengilustrasikan Integral lintas dengan 1, 2 celah (telah dipaparkan di latar belakang), dan pengembangannya yaitu 3 celah. Kemudian untuk menghitung distribusi probabilitas dan merepresentasikan pola grafiknya, masing-masing celah dapat dipandang sebagai sumber cahaya, melintas diantara celah. Lintasan inilah yang menggugah R.P Feynman untuk merumuskan kembali permasalahan interferensi lebih mudah.

Konsep Fisika memegang peranan penting dalam menentukan persamaan gerak dari sistem fisis. Dalam kehidupan sehari-hari dapat diambil contoh sederhana dimana berdasarkan mekanika klasik, batu dilempar oleh si A secara horizontal (dalam satu dimensi) dari posisi awal  $x_a$ , waktu awal  $t_a$  ke posisi akhir  $x_b$ , waktu akhir  $t_b$ , dapat diilustrasikan seperti Gambar (3.1),

Bertolak belakang dengan konsep mekanika kuantum karena pergerakan par-



Gambar 1.1: Batu dilempar dari posisi awal, waktu awal ke posisi akhir, waktu akhir

tikel yang menjadi acuan dimana tidak dapat diinterpretasikan seperti ilustrasi di atas, karena konsep ini tidak dapat ditentukan secara pasti posisi awal, waktu awal dan posisi akhir, waktu akhir, hanya dapat memprediksikan serta menghitung probabilitas yang bergerak diantara posisi, waktu tersebut. Dikarenakan tidak tentunya posisi dan waktu maka dapat dipenuhi Prinsip Ketidakpastian Heisenberg yang akan dibahas kemudian.

Untuk tinjauan mekanika kuantum, yang diformulasikan oleh E. Schrödinger,



objek fundamental adalah fungsi gelombang  $\psi$ . Fungsi gelombang berhubungan langsung dengan keadaan dari sistem atau partikel dan absolut dari fungsi gelombang adalah probabilitas distribusi sistem atau partikel. Sebagai contoh, untuk menghitung probabilitas partikel bergerak dari  $(x_a, t_a)$  ke  $(x_b, t_b)$  memenuhi formulasi yang ekuivalen berdasarkan persamaan Schrödinger dan masih berhubungan dengan formulasi mekanika klasik yaitu formulasi Hamiltonian, penjumlahan energi kinetik dan energi potensial,

$$H[x(t), \dot{x}(t), t] = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \quad (1.1)$$

dimana  $p$  adalah momentum (operator mekanika kuantum  $i\hbar\partial/\partial x$ ),  $m$  adalah massa partikel,  $\hbar$  adalah konstanta Planck dibagi  $2\pi$  dan  $V(x)$  adalah potensial. Kemudian jika partikel berada di posisi  $x_a$ , waktu  $t_a$  dan di  $x_b$ , waktu  $t_b > t_a$  diberikan Prinsip Aksi melalui pendekatan klasik bernilai minimum

$$\frac{\delta}{\delta x(t)} S[x_b, t_b; x_a, t_a] |_{x_{\text{partikel}}} = 0 \quad (1.2)$$

dimana

$$S[x_b, t_b; x_a, t_a] \equiv \int_{t_i}^{t_f} L[x(t), \dot{x}(t), t] dt \quad (1.3)$$

Untuk membuatnya lebih kuantitatif diberikan Lagrangian sistem  $L$ ,

$$L[x(t), \dot{x}(t), t] = \frac{m}{2} \dot{x}(t)^2 - V[x(t), t] \quad (1.4)$$

dimana  $\dot{x}(t) = dx(t)/dt$  adalah kecepatan partikel terhadap waktu  $t$ .

Dari pers.(3.2), Prinsip Aksi tersebut direpresentasikan melalui pendekatan klasik

$$\frac{\delta}{\delta x(t)} \text{fase} |_{x_{\text{partikel}}} = 0 \quad (1.5)$$

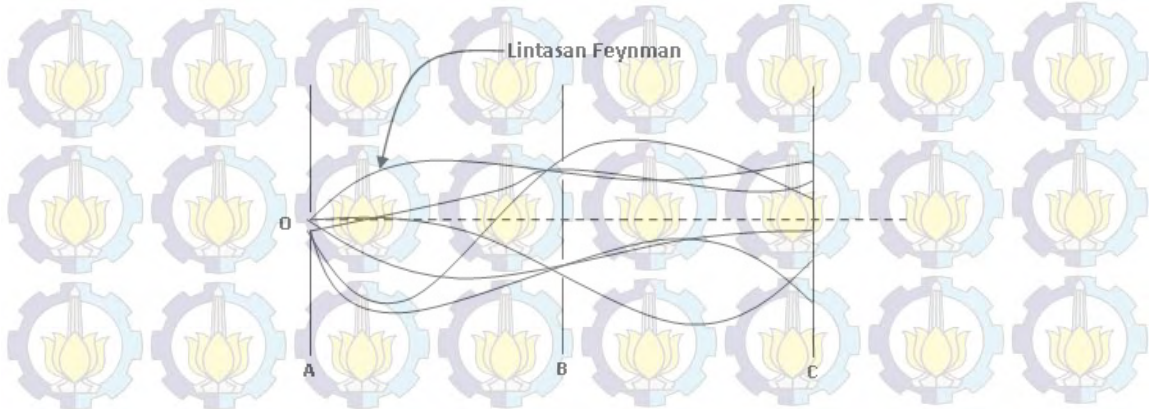
Prinsip tersebut merupakan integral fase ( $\frac{S}{\hbar}$ ) yang berhubungan dengan teori klasik dan teori kuantum dimana  $K(x_b, t_b; x_a, t_a) \equiv \langle x_b, t_b | x_a, t_a \rangle$  (bahasa mekanika kuantum) adalah amplitudo, dengan batasan  $S \gg \hbar$  secara simbolik ditulis

$$K = \langle x_b, t_b | x_a, t_a \rangle = \text{const} \sum_{\text{seluruh lintasan}} e^{i(\text{fase})} \quad (1.6)$$

Namun, apa yang bisa dijelaskan dari persamaan Amplitudo di atas, dengan mengintegrasikan seluruh lintasan (pergerakan partikel) secara kontinu? Untuk menjawab konteks permasalahan ini, dijelaskan detail bagaimana Metode Integral lintas Feynman diaplikasikan dalam kasus interferensi dan difraksi.

Konsep probabilitas dalam mekanika kuantum menggunakan prinsip superposisi, yang diartikan sebagai probabilitas total atau jumlahan semua probabilitas





Gambar 1.2: Lintasan Feynman, alternatif lintasan yang mungkin dari pergerakan partikel terhambur O

yang mungkin untuk tiap lintasan yang berbeda. Untuk tiap satu lintasan kecil  $p - q$  berada diantara titik  $x_i$  dan  $x_{i+1}$  dengan interval waktu  $\epsilon = t_{i+1} - t_i$  (Gambar (3.3)), dimana proses ini dapat dilakukan dengan tak hingga/ alternatif lintasan yang mungkin, lintasan inilah yang menggugah inspirasi Feynman untuk menghitung formula integral lintas (Gambar (3.2)).

Dimana masing-masing lintasan  $p - q$  mempunyai amplitudo atau Kernel dan mempunyai bobot  $e^{\frac{i}{\hbar} S[x(t)]}$ . Kemudian dalam pendekatan Feynman, amplitudo total merupakan jumlah kontribusi dari masing-masing lintasan  $p - q$  diberikan

$$K = \langle x_b, t_b | x_a, t_a \rangle = \text{const} \sum_{\text{seluruh lintasan}} e^{\frac{i}{\hbar} S[x(t)]} \quad (1.7)$$

Dari analogi pers.(3.7) di atas, untuk tiap lintasan  $p - q$  partikel yang bergerak dari  $x_i$  ke  $x_{i+1}$  diberikan (gambar (3.3))

$$K = \int Dx(t) e^{\frac{i}{\hbar} S[x]} \quad (1.8)$$

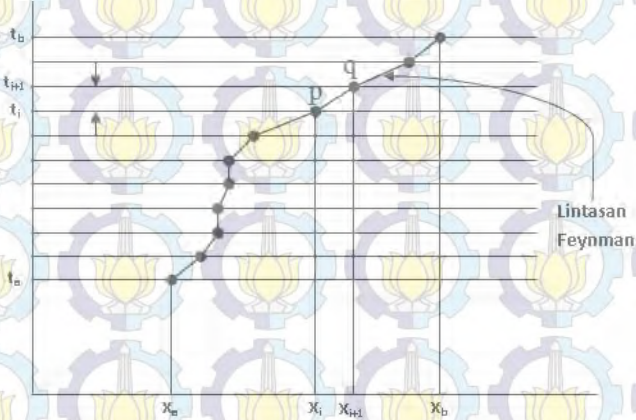
dimana  $\int Dx(t)$  adalah integral dengan faktor fasenya merupakan fungsi trayektori antara titik awal dan titik akhir atau biasa didefinisikan sebagai ukuran lintasan. Dengan kata lain integral seluruh lintasan yang mungkin atau disebut juga integral fungsional. Namun digunakan untuk apa faktor fase  $e^{\frac{i}{\hbar} S[x(t)]}$  dalam pers.(3.7). Salah satu contoh, diilustrasikan, si B menangkap batu yang dilempar oleh si A, dalam konsep klasik, hanya ada satu lintasan atau jejak pergerakan batu dimana merepresentasikan amplitudo. Jika menggunakan konsep lintasan klasik, maka yang kita dapat adalah batu yang dilempar oleh si A dengan penglihatan sesuai arah pergerakan batu yang ditangkap oleh si B. Dari ilustrasi ini, dapat disimpulkan bahwa pergerakan batu diinterpretasikan sebagai aksi dari fungsi trayektori si A ke si B secara kontinu sehingga aksi ini merupakan integral lintasan Feynman yang diberikan sebagai berikut

$$\int Dx(t) = \frac{1}{\text{const}} \int dx_1 \cdots \int dx_{i+1} \cdots \int dx_{n-1} \quad (1.9)$$



Dari analogi di atas, jika  $n \rightarrow \infty$  dan  $\epsilon \rightarrow 0$  sehingga formula ini memberikan pengertian yang jelas sesuai ilustrasi di atas tentang integral lintasan Feynman kedepan.

Dari Prinsip Aksi di atas, diberikan jumlahan dari tiap aksi (lintasan kecil  $p - q$ )



Gambar 1.3: Plot waktu terhadap posisi, integral lintasan partikel bergerak dari posisi  $x_a$  ke  $x_b$ , interval waktu dari  $t_a$  ke  $t_b$  dengan batasan waktu  $\epsilon \rightarrow 0$

untuk satu lintasan dari posisi  $x_a$  ke  $x_b$  (Gambar (3.3))

$$S[x_b, t_b; x_a, t_a] = \sum_i \left\{ \frac{m}{2} \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{\epsilon} - \epsilon V \left( \frac{x_{i+1} + x_i}{2} \right) \right\} \quad (1.10)$$

Dari Gambar (3.3), seluruh alternatif lintasan dapat diartikan sebagai Amplitudo (Kernel (K)) untuk partikel yang bergerak dari posisi  $x_a$  waktu  $t_a$  ke posisi  $x_b$  waktu  $t_b$  atau perkalian amplitudo dari masing-masing lintasan  $p - q$  diberikan

$$K \approx \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\text{const}} \int \int \dots \int e^{\frac{i}{\hbar} S[x(t)]} \frac{dx_1}{\text{const}} \dots \frac{dx_{n-1}}{\text{const}} \quad (1.11)$$

Kemudian bagaimana cara mengetahui bahwa probabilitas total berdasar definisi  $\int Dx(t)$  dan fase  $e^{\frac{i}{\hbar} S[x(t)]}$ , kunci dari semua permasalahan diberikan sesuai gambar (3.4)

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0, n \rightarrow \infty} \int \frac{dx_{n-1}}{(2i\pi\hbar\epsilon/m)^{1/2}} \exp \left( \frac{i}{\hbar} \frac{m}{2} \frac{(x_b - x_{i+1})^2}{\epsilon} \right) \underbrace{- \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \epsilon V \left( \frac{x_b + x_{i+1}}{2} \right) \right\}}_{(1)} \quad (1.12)$$

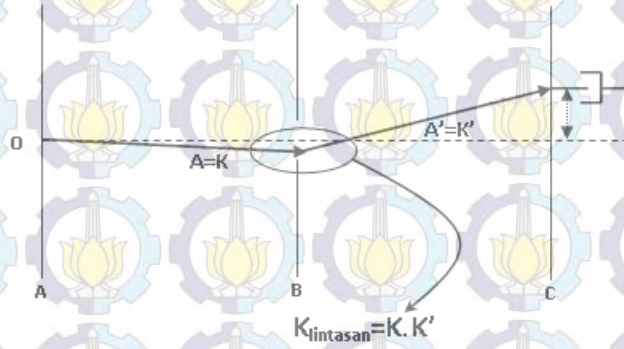
dimana (1), jika  $x_b$  dan  $x_{i+1}$  saling mendekat dengan  $\epsilon \rightarrow 0$  maka

$$\frac{x_b + x_{i+1}}{2} \cong \frac{2x_b}{2} = x_b \quad (1.13)$$

$$\exp \left( \frac{-i\epsilon}{\hbar} V(x_b) \right) = 1 - \frac{i\epsilon}{\hbar} V(x_b) + \dots \quad (1.14)$$



Untuk lebih mudah memahami formula di bawah ini secara riil, diberikan



Gambar 1.4: Lintasan partikel pada eksperimen 1 celah

set eksperimen interferensi menggunakan 1 celah (Gambar (3.4)), dengan membagi integral sebanyak  $n$  dan mengintegrasikan fase  $e^{\frac{i}{\hbar}S[x(t)]}$  di semua posisi  $x_i, i = 1, \dots, n-1$  saat waktu  $t_i = i\epsilon, \epsilon = (t_{i+1} - t_i)/n$  antara  $x_0 = x_a$  dan  $x_n = x_b$ , dimana  $S[x_1, \dots, x_n] = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{\epsilon} - \epsilon V\left(\frac{x_{i+1} + x_i}{2}\right) \right\}$ , dikalikan dengan faktor normalisasi  $\frac{1}{(2i\pi\hbar\epsilon/m)^{1/2}}$ . Dalam konsep mekanika kuantum, Amplitudo lintasan total untuk 1 celah sama dengan perkalian amplitudo ( $K$ ) dan ( $K'$ ) diberikan

$$\begin{aligned} K(x_b, t_b; x_a, t_a) &\equiv K.K' \\ &\equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0, n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2i\pi\hbar\epsilon/m)^{1/2}} \int \frac{dx_1}{(2i\pi\hbar\epsilon/m)^{1/2}} \int \frac{dx_2}{(2i\pi\hbar\epsilon/m)^{1/2}} \\ &\quad \exp\left(\frac{i}{\hbar} \frac{m(x_2 - x_1)^2}{2\epsilon}\right) \end{aligned} \quad (1.15)$$

dimana  $\epsilon = (t_b - t_a)/n, x_0 = x_a, x_n = x_b$  dan  $m$  adalah massa partikel elektron atau foton (Feynman dan Hibbs, 1965).

## 1.1 Eksperimen Kuantum Young

Kita dapat menggunakan metode Integral Feynman di atas untuk mendeskripsikan interferensi Young, fenomena ini teramati sejak tahun 1800an yang mengenalkan sifat-sifat cahaya. Setiap celah dapat direpresentasikan sebagai sumber (partikel terhambur) dengan amplitudo penjalaran gelombang sferis seperti pada pers. (2.4), secara matematik ditulis kembali sebagai berikut

$$A(x) = \sum_{j=1}^s A_j e^{-i2\pi|\vec{r}_j|/\lambda} \quad (1.16)$$

dimana  $A(x)$  adalah amplitudo masing-masing celah dimana direpresentasikan sebagai distribusi probabilitas partikel terhambur dari sumber sampai ke layar di



posisi  $y$  Gambar(2.1),  $s$  adalah jumlah celah,  $A_j$  adalah amplitudo masing-masing celah,  $|\vec{r}_j|$  adalah jarak dari celah ke- $j$  ke titik  $y$  pada layar, dan  $\lambda$  adalah panjang gelombang de-Broglie. Jika diasumsikan fase  $\theta = 2\pi|\vec{r}_j|/\lambda$ , maka intensitas yang terhitung sebagai distribusi probabilitas adalah

$$\begin{aligned} I(x) &= |A(x)|^2 \\ &= |A_j|^2 \sum_{j,k=1}^s e^{-i(j-k)\Delta\theta} \\ &= |A_j|^2 \left[ s + 2 \sum_{j=1}^{s-1} (s-j) \cos(j\Delta\theta) \right] \end{aligned} \quad (1.17)$$

Dengan menggunakan geometri untuk mendeskripsikan  $(j-k)\Delta\theta = \theta_j - \theta_k$  dimana batasan tersebut merepresentasikan rentang distribusi probabilitas di posisi  $y$  dari pusat layar. Untuk kasus 2 celah, diperoleh interferensi maksimum dengan  $d \sin \theta = m\lambda$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

### 1.1.1 Interferensi Kuantum

Dengan menggunakan keadaan Fock sebagai keadaan awal  $|\psi_0\rangle = |n\rangle$ , distribusi probabilitas yang terdeteksi di titik  $y$  pada layar adalah

$$\langle M \rangle = \frac{1}{s} \sum_{j,k=1}^s \langle \psi_{n,j} | \hat{U}^\dagger \hat{A}^{\dagger m} \hat{A}^m \hat{U} | \psi_{n,j} \rangle \quad (1.18)$$

Dari persamaan tersebut, ada 3 keadaan berdasarkan besarnya intensitas cahaya dari sumber  $|n\rangle$  dan distribusi probabilitas yang sampai ke layar di posisi  $y$   $|m\rangle$ , adalah

$$\begin{aligned} n < m &\rightarrow \langle M \rangle = 0 \\ n = m &\rightarrow \langle M \rangle = \frac{n}{s} \sum_{j,k=1}^s e^{-in(j-k)\Delta\theta} \\ &= \frac{n}{s} \left[ s + 2 \sum_{j=1}^{s-1} (s-j) \cos(jn\Delta\theta) \right] \\ n > m &\rightarrow \langle M \rangle = \sqrt{\frac{n}{(n-m)}} \end{aligned} \quad (1.19)$$

Tiga keadaan ini menunjukkan pola interferensi sampai ke layar. Kemudian hasil akhir untuk menentukan Intensitas adalah

$$\langle M \rangle = \frac{m}{s} \left[ s + 2 \sum_{j=1}^{s-1} (s-j) \cos(jm\Delta\theta) \right] \quad (1.20)$$

Sehingga persamaan ini dideskripsikan sebagai distribusi probabilitas sampai ke layar  $y$  bergantung pada intensitas sumber  $|\psi_0\rangle$ .



### 1.1.2 Keadaan Koherensi

Menggunakan keadaan awal untuk keadaan koherensi sumber  $|\psi_0\rangle$  didefinisikan

$$|\psi_0\rangle = |\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (1.21)$$

Persamaan ini lebih lanjut akan diperoleh distribusi probabilitas sampai ke layar

$$\begin{aligned} \langle M \rangle &= e^{-|\alpha|^2} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\alpha^{*n} \alpha^m}{\sqrt{n!m!}} \langle n | \hat{U}^\dagger \hat{A}^{\dagger m} \hat{A}^m \hat{U} | m \rangle \\ &= e^{-|\alpha|^2} \left\{ \frac{m}{s} \left[ s + 2 \sum_{j=1}^{s-1} (s-j) \cos(jm\Delta\theta) \right] \right\} \end{aligned} \quad (1.22)$$

dimana  $j, s$  adalah celah pertama sampai celah ke- $n$ ,  $m$  adalah orde gelap-terang dan  $\Delta\theta$  adalah beda fase dari jarak antar celah (Sanabria, H., Rodriguez-Lara, B.M, 2007).

## 1.2 Penerapan Difraksi dan Interferensi

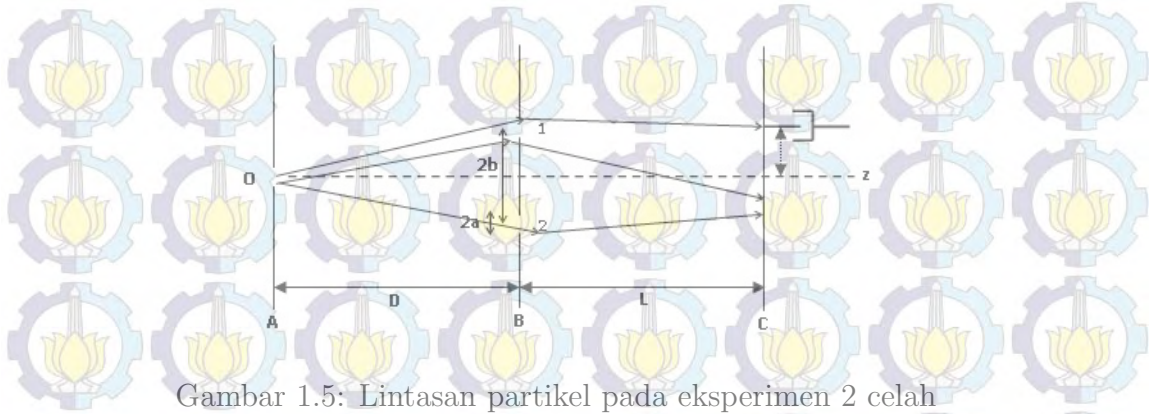
Dalam konsep mekanika kuantum, dikarenakan ukuran lintasan partikel tidak dapat diketahui secara pasti, dengan kata lain, tidak dapat diketahui ketika partikel bergerak melalui celah. Sangat mungkin partikel bergerak melalui celah dalam beberapa kali sebelum sampai di layar, dan probabilitasnya relatif kecil sehingga solusinya diberikan batasan jarak dari sumber ke celah dan dari celah ke layar pada set eksperimen (Gambar (3.5)) dengan jarak antar kedua celah  $2b$  dan lebar kedua celah  $2a$ , partikel terhambur dari sumber ke celah selama waktu  $T$  dan dari celah ke layar selama waktu  $\tau$ . Kemudian kita menghitung probabilitas amplitudo partikel dari sumber saat posisi awal  $O = (x, y, z) = (0, 0, 0)$  dengan waktu  $t = 0$  menuju ke layar dan saat di posisi akhir  $(x, z = D+L)$  dengan waktu  $T+\tau$ , untuk posisi di titik pusat antar kedua celah  $(w, z = D)$ ,  $-b < w < b$  dengan waktu  $t = T$ . Pernyataan ini hanya bisa diasumsikan sesuai pandangan klasik. Kemudian diasumsikan panjang gelombang  $\lambda$ , dimana besarnya mendekati atau sama dengan panjang gelombang arah  $z$   $\lambda \cong \lambda_z = 2\pi\hbar/(m\nu_z)$  namun lebih kecil dibanding jarak  $\lambda \ll D, L$ .

Selanjutnya menghitung amplitudo transisi partikel bergerak dari titik  $O = (x, y, z) = (0, 0, 0)$  saat waktu  $t = 0$ , melalui 2 celah di posisi  $(w, z = D)$ ,  $-b < w < b$  saat waktu  $t = T$  dan tiba (layar c) di posisi  $(x, z = L + D)$  saat waktu  $t = T + \tau$

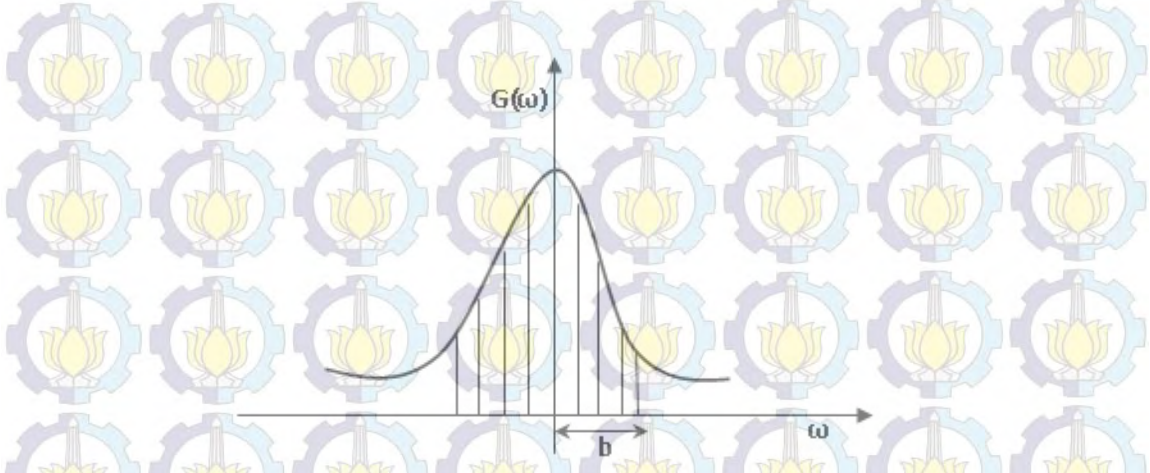
$$K \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\omega G_{[-b,b]}(\omega) K_{T+\tau,D} K_{T+\tau,L} \quad (1.23)$$

dimana diberikan fungsi Gaussian seperti pada gambar (3.6)





Gambar 1.5: Lintasan partikel pada eksperimen 2 celah



Gambar 1.6: Fungsi Gaussian  $-b < \omega < b$

$$\begin{aligned} G_{[-b,b]}(\omega) &= 0 \rightarrow \omega > b, \omega < -b \\ &= 1 \rightarrow -b < \omega < b \end{aligned} \quad (1.24)$$

Kemudian dari pers.(3.23) secara eksplisit diberikan

$$\begin{aligned} K_{L+D,T+\tau} &= \frac{e^{i\frac{mD^2}{2\hbar T}}}{\sqrt{2i\pi\hbar T/m}} \frac{e^{i\frac{mL^2}{2\hbar\tau}}}{\sqrt{2i\pi\hbar\tau/m}} \\ &\int_{b-a}^{b+a} dw \frac{e^{i\frac{m(x-w)^2}{2\hbar\tau}}}{\sqrt{2i\pi\hbar\tau/m}} \frac{e^{i\frac{mw^2}{2\hbar T}}}{\sqrt{2i\pi\hbar T/m}} \end{aligned} \quad (1.25)$$

### 1.3 Distribusi Probabilitas dalam Suku Integral Fresnel

Selanjutnya dihitung amplitudo  $A_1(z)$ ,  $A_2(z)$  yang keluar dari masing-masing celah 1 dan 2, kemudian 2 amplitudo tersebut ditambah untuk memperoleh amplitudo total  $A(z)$  dan di modulus kuadratkan, didapatkan probabilitas

$$P(z) \equiv |A(z)|^2 \quad (1.26)$$



Melalui pers.(3.25), ekspresi persamaan untuk  $A_1(z)$  adalah

$$A_1(x; a, b) = \int_{-b}^b dw \frac{e^{i \frac{m(x-w)^2}{2\hbar\tau}}}{\sqrt{2i\pi\hbar\tau/m}} \frac{e^{i \frac{mw^2}{2\hbar T}}}{\sqrt{2i\pi\hbar T/m}} \quad (1.27)$$

Perlu dicatat bahwa

$$\exp\left(\frac{m(x-w)^2}{2\hbar\tau} + \frac{mw^2}{2\hbar T}\right) = \frac{mx^2}{4\hbar^2\tau T} \approx \frac{1}{2\hbar^2} \frac{m}{2} \left(\frac{x}{t}\right)^2 \quad (1.28)$$

dimana pers.(3.28) di atas adalah energi kinetik (diasumsikan  $t \gg T$ ), jika amplitudo mempunyai frekuensi tertentu maka kita menghubungkannya dengan energi

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2\hbar^2} \frac{m}{2} \left(\frac{x}{t}\right)^2 \\ \hbar\omega &= \frac{1}{2\hbar^2} \frac{m}{2} \left(\frac{x}{t}\right)^2 \\ \hbar \frac{2\pi}{T} &= \frac{1}{2\hbar^2} \frac{m}{2} \left(\frac{x}{t}\right)^2 \\ 2\pi &\approx \frac{m}{2} \left(\frac{x}{t}\right)^2 \end{aligned} \quad (1.29)$$

Sehingga dari pers.(3.28), diperoleh

$$\exp\left(\frac{m(x-w)^2}{2\hbar\tau} + \frac{mw^2}{2\hbar T}\right) = e^{2\pi} \quad (1.30)$$

Lebih lanjut disederhanakan,

$$\begin{aligned} A_1(x; a, b) &= \frac{e^{i \frac{mx^2}{2\hbar(T+\tau)}}}{\sqrt{2i\pi\hbar(T+\tau)/m}} \int_{b-a}^{b+a} dw \sqrt{\frac{T+\tau}{2i\pi\hbar T\tau/m}} \\ &\quad \exp\left\{i \left(\frac{T+\tau}{2\hbar T\tau/m}\right) \left(w - \frac{x}{1+\tau/T}\right)^2\right\} \\ &= \frac{e^{i \frac{mx^2}{2\hbar(T+\tau)}}}{\sqrt{(2i)^2\pi\hbar(T+\tau)/m}} \int_{\alpha_-^{(1)}}^{\alpha_+^{(1)}} dw' \exp\left(\frac{i\pi}{2} w'^2\right) \end{aligned} \quad (1.31)$$

dimana

$$\alpha_{\pm}(x; a, b) \equiv \sqrt{\frac{T+\tau}{\pi\hbar T\tau/m}}(b \pm a) - \frac{x}{\sqrt{\pi\hbar T\tau/m}} \sqrt{\frac{T}{T+\tau}} \quad (1.32)$$

Dari pers.(3.31), tersusun atas bagian riil dan imajiner, kemudian diperoleh integral fungsi cosinus  $C[u]$  dan sinus  $S[u]$ , integral fungsi tersebut dinamakan



integral Fresnel

$$\begin{aligned} C[u] &\equiv \int_0^u dw \cos\left(\frac{\pi w^2}{2}\right) \\ S[u] &\equiv \int_0^u dw \sin\left(\frac{\pi w^2}{2}\right) \end{aligned} \quad (1.33)$$

Secara eksplisit diberikan ekspansi asimtotik dari pers.(3.33) diatas

$$\begin{aligned} C[\pm u] &\cong \pm \frac{1}{2} + \frac{i}{2\pi u} \left( e^{\frac{i\pi u^2}{2}} - e^{-\frac{i\pi u^2}{2}} \right) \\ &\cong \pm \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi u} \sin \frac{\pi u^2}{2}, u \rightarrow \infty \\ S[\pm u] &\cong \pm \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi u} \left( e^{\frac{i\pi u^2}{2}} + e^{-\frac{i\pi u^2}{2}} \right) \\ &\cong \pm \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi u} \cos \frac{\pi u^2}{2}, u \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (1.34)$$

Kemudian didapatkan ekspresi analitik untuk amplitudo

$$\begin{aligned} A_1(x; a, -b) = A_2(x; a, b) &= \frac{e^{i \frac{mx^2}{2\hbar(T+\tau)}}}{\sqrt{(2i)^2 \pi \hbar (T+\tau)/m}} \times \\ &\quad (C[\alpha_+(x; a, b)] - C[\alpha_-(x; a, b)] + iS[\alpha_+(x; a, b)] - iS[\alpha_-(x; a, b)]) \end{aligned} \quad (1.35)$$

Sehingga didapatkan Distribusi probabilitas dari pers.(3.35) untuk 1 celah adalah

$$\begin{aligned} P(x; a) &= |A_1(x; a, b)|^2 \\ &= \frac{1}{2\lambda(L+D)} \\ &\quad ([C(\alpha_+(x; a, b)) + C(\alpha_-(x; a, b))]^2 + [S(\alpha_+(x; a, b)) + S(\alpha_-(x; a, b))]^2) \end{aligned} \quad (1.36)$$

Didefinisikan kembali dari pers.(3.32) untuk kasus 1 celah (dimisalkan lebar celah  $W$  (koherensi)  $2a$ )

$$\alpha(x; a) = \sqrt{N_F(a)} \sqrt{1 + L/D} \left( 1 - \frac{x}{a} \frac{1}{1 + L/D} \right) \quad (1.37)$$

dimana  $N_F(a) = W/\lambda L$  adalah bilangan Fresnel.

Jika pada pers.(3.34) dihubungkan dengan pers.(3.37) dan diaplikasikan ke



pers.(3.36), maka diberikan

$$\begin{aligned} C(\alpha_+(x; a, b)) + C(\alpha_-(x; a, b)) &\approx \frac{1}{\pi\alpha(x; a)} \sin\left(\frac{\pi\alpha(x; a)^2}{2}\right) \\ &+ \frac{1}{\pi\alpha(x; -a)} \sin\left(\frac{\pi\alpha(x; -a)^2}{2}\right) \\ S(\alpha_+(x; a, b)) + S(\alpha_-(x; a, b)) &\approx \frac{1}{\pi\alpha(x; a)} \cos\left(\frac{\pi\alpha(x; a)^2}{2}\right) \\ &+ \frac{1}{\pi\alpha(x; -a)} \cos\left(\frac{\pi\alpha(x; -a)^2}{2}\right) \end{aligned} \quad (1.38)$$

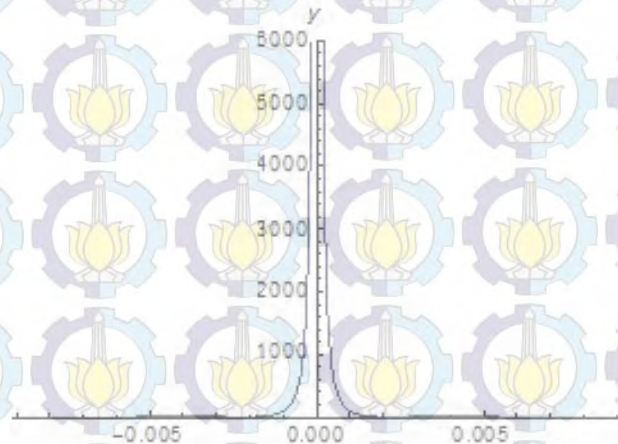
Kemudian menggunakan parameter  $\eta \equiv 1 + L/D$  dan  $\gamma = \eta - 1$  dari pers.(3.37) maka diperoleh distribusi probabilitas untuk 1 celah

$$P(x; a) \approx \frac{2\gamma}{\pi^2\eta^2} \left( \frac{a^2}{\left(\frac{x^2}{\eta^2} - a^2\right)^2} + \frac{1}{\frac{x^2}{\eta^2} - a^2} \sin^2\left(\pi N_F(a) \frac{x}{a}\right) \right) \quad (1.39)$$

Lebih lanjut, dari pers.(3.39) dengan  $a(\text{lebar celah}) = 0,44 \cdot 10^{-4} \text{m}$ ,  $\lambda = 3,9 \cdot 10^{-9} \text{m}$  untuk  $N_F = 0,01$  diberikan plot Intensitas medan jauh (nilai amplitudonya tertentu/tidak menuju tak hingga) Gambar (3.7).

Untuk 2 celah, dapat dihitung amplitudo total dengan menjumlahkan amplitudo kedua celah tersebut

$$A(x; a, b) = A_1(x; a, b) + A_2(x; a, b) \quad (1.40)$$



Gambar 1.7: Intensitas 1 Celah medan jauh

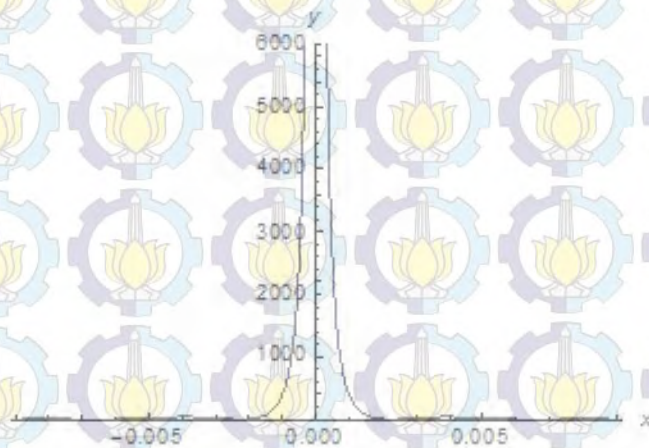


## 1.4 Perumusan Interferensi dan Difraksi Dua Celah

Eksperimen Young menjelaskan secara rinci bagaimana pola gelap terang dapat direpresentasikan pada layar dimana menggunakan dasar teori difraksi  $P_{1,2}$  dan interferensi  $I_{1,2}$  sebagai konsep utama untuk menjabarkan secara detail. Perlu diperhatikan bahwa ada tambahan suku jika dibandingkan dengan yang satu celah. Berikut formula probabilitas 2 celah dapat ditentukan dari pers.(3.35,3.36)

$$\begin{aligned}
 A &= A_1 + A_2 \\
 P = |A|^2 &= |A_1 + A_2|^2 \\
 &= |A_1|^2 + |A_2|^2 + (A_1 A_2^* + A_2 A_1^*) \\
 &= P_1 + P_2 + I_{12} \\
 &= \frac{\gamma}{2\lambda L \eta} \left( [(C(\alpha_+) + C(\alpha_-))^2 + (S(\alpha_+) + S(\alpha_-))^2]_1 \right. \\
 &\quad \left. + [(C(\alpha_+) + C(\alpha_-))^2 + (S(\alpha_+) + S(\alpha_-))^2]_2 \right. \\
 &\quad \left. + 2 [(C(\alpha_+) + C(\alpha_-))^2 + (S(\alpha_+) + S(\alpha_-))^2]_{12} \right) \\
 &= \frac{16}{\pi^2} \frac{1}{N_F \eta \left(1 - \frac{x}{a\eta}\right)^2} \cos^2 \left( \frac{\pi}{2} N_F \eta \left(1 - \frac{x}{a\eta}\right)^2 \right) \quad (1.41)
 \end{aligned}$$

Kemudian diberikan plot Intensitas 2 celah Gambar (3.8). Dengan konsep sama, maka hasil yang diperoleh seperti literatur (Beau, M, 2012) dan dari Gambar (2.5)-persm.(2.25) sebelumnya juga sama (Thomas, V.M, 2000), dengan perbedaan konstanta yang diidentifikasi sebagai amplitudo dan perbedaan lebar celah yang diidentifikasi sebagai beamwidth/ lebar koherensi secara fluktuatif.



Gambar 1.8: Intensitas 2 Celah dengan Lebar celah tertentu



## BAB 1

### Hasil dan Pembahasan

Salah satu contoh terobosan besar sebagai bukti awal munculnya teori kuantum adalah teori interferensi, teori ini mengingatkan kita pada eksperimen dua celah yang dilakukan oleh Young pada abad ke-19, versi aslinya yaitu menggunakan celah-celah tipis yang dibuat dengan silet pada permukaan lembaran-lembaran layar. Dengan celah-celah sejajar ini menggantikan lubang-lubang jarum, pola cahaya yang tampak pada permukaan layar terakhir adalah pita-pita terang-gelap berjajar, yang dengan jelas menunjukkan pola interferensi gelombang. Dengan mengukur jarak antar pita, panjang gelombang cahaya dapat diketahui. Secara umum teori ini menggunakan metode konvensional untuk menjelaskan detail fenomena pola interferensi, kemudian diperluas menggunakan metode Feynman untuk menyederhanakan kerumitan matematisnya.

Penelitian yang dikembangkan adalah mencoba menghitung distribusi probabilitas partikel dari celah sampai ke layar yang mungkin dalam keadaan celah banyak menggunakan metode lintasan Feynman, kemudian direpresentasikan dalam gambar sebagai fungsi dari intensitas. Terlepas dari permasalahan kelebihan dan kekurangan antara kedua metode Feynman dan konvensional, maka penelitian ini diungkap peran metode integral Feynman untuk beberapa sistem mekanika kuantum yang selanjutnya dimanfaatkan dalam mendapatkan distribusi probabilitas partikel pada interferensi 3 celah dan 4 celah. Detail penjelasan untuk menghitung distribusi probabilitas pada dasarnya sama dengan penjelasan untuk 1 celah dan 2 celah pada literatur yang sudah ada hanya ada penambahan suku dan perbedaan hasil analitik yang sesuai dengan jumlah celah serta perbedaan secara fluktuatif pada pola gelap-terang dimana semua konsep teori ini harus sesuai dengan fakta secara eksperimen.

Metode konvensional dan metode Feynman merupakan metode yang menggunakan teori mekanika kuantum. Perbedaan kedua metode tersebut sudah dijelaskan detail sebelumnya. Kemudian hasil penjelasan berikut tentang interferensi 1, 2, 3 dan 4 celah berhubungan dengan perbedaan intensitas di titik pusat (terang) dan seterusnya dikarenakan koefisien pada persamaan Feynman untuk setiap penambahan satu celah semakin besar sehingga ada perbedaan dari segi intensitas cahaya di titik pusat. Semakin besar koefisien pada persamaan Feynman maka semakin besar intensitas cahayanya, begitu pula sebaliknya. Berikut perbandingan distribusi probabilitas untuk setiap penambahan celah yang tentunya ada ketergantungan lebar celah yang diekspresikan dari nilai amplitudo dimana direpresentasikan sebagai variasi intensitas cahaya.

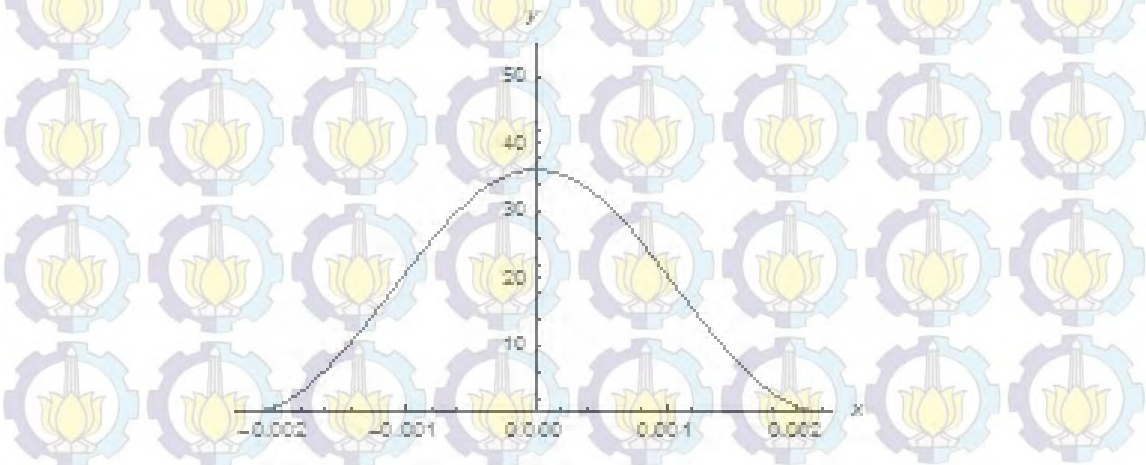


## 1.1 Tiga Celah

Dengan cara yang sama seperti Bab 3, Distribusi Probabilitas untuk  $N=3$  celah diberikan oleh hubungan berikut ini,

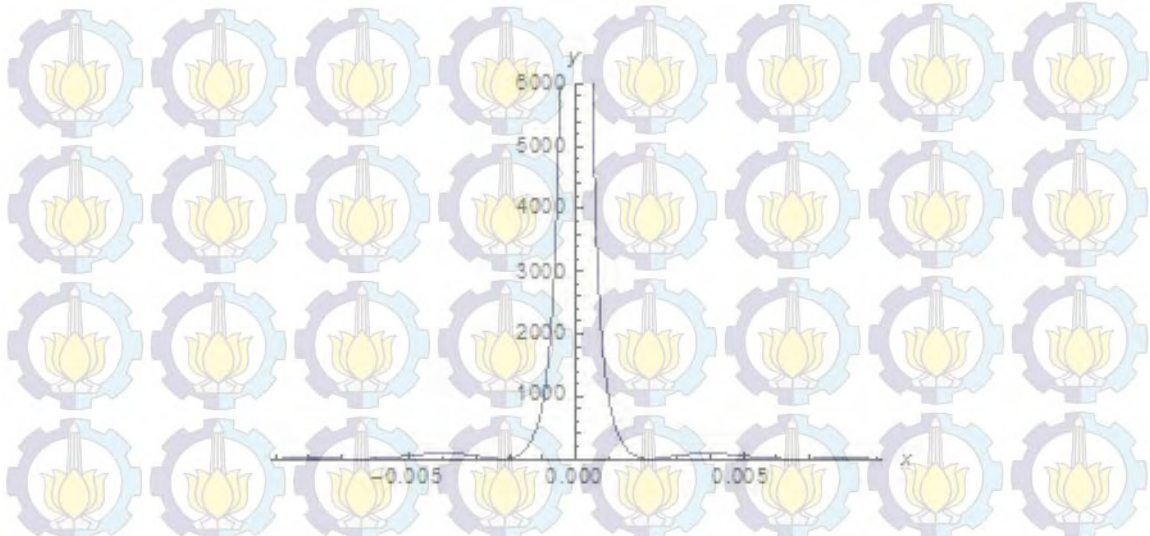
$$\begin{aligned}
 A &= A_1 + A_2 + A_3 \\
 P = |A|^2 &= |A_1 + A_2 + A_3|^2 \\
 &= |A_1|^2 + |A_2|^2 + |A_3|^2 + (A_1 A_2^* + A_2 A_1^*) \\
 &\quad + (A_1 A_3^* + A_3 A_1^*) + (A_2 A_3^* + A_3 A_2^*) \\
 &= P_1 + P_2 + P_3 + I_{12} + I_{13} + I_{23} \\
 &= \frac{\gamma}{2\lambda L \eta} \left( [(C(\alpha_+) + C(\alpha_-))^2 + (S(\alpha_+) + S(\alpha_-))^2]_1 \right. \\
 &\quad + [(C(\alpha_+) + C(\alpha_-))^2 + (S(\alpha_+) + S(\alpha_-))^2]_2 \\
 &\quad + [(C(\alpha_+) + C(\alpha_-))^2 + (S(\alpha_+) + S(\alpha_-))^2]_3 \\
 &\quad + 2 \left( [(C(\alpha_+) + C(\alpha_-))^2 + (S(\alpha_+) + S(\alpha_-))^2]_{12} \right) \\
 &\quad + 2 \left( [(C(\alpha_+) + C(\alpha_-))^2 + (S(\alpha_+) + S(\alpha_-))^2]_{13} \right) \\
 &\quad \left. + 2 \left( [(C(\alpha_+) + C(\alpha_-))^2 + (S(\alpha_+) + S(\alpha_-))^2]_{23} \right) \right) \\
 &= \frac{36}{\pi^2} \frac{1}{N_F \eta \left(1 - \frac{x}{a\eta}\right)^2} \cos^2 \left( \frac{\pi}{2} N_F \eta \left(1 - \frac{x}{a\eta}\right)^2 \right) \quad (1.1)
 \end{aligned}$$

diberikan plot Intensitas 3 celah (Gambar (4.1,4.2))



Gambar 1.1: Intensitas 3 Celah dengan Lebar celah tidak diperhitungkan





Gambar 1.2: Intensitas 3 Celah dengan Lebar celah tertentu

## 1.2 Empat Celah

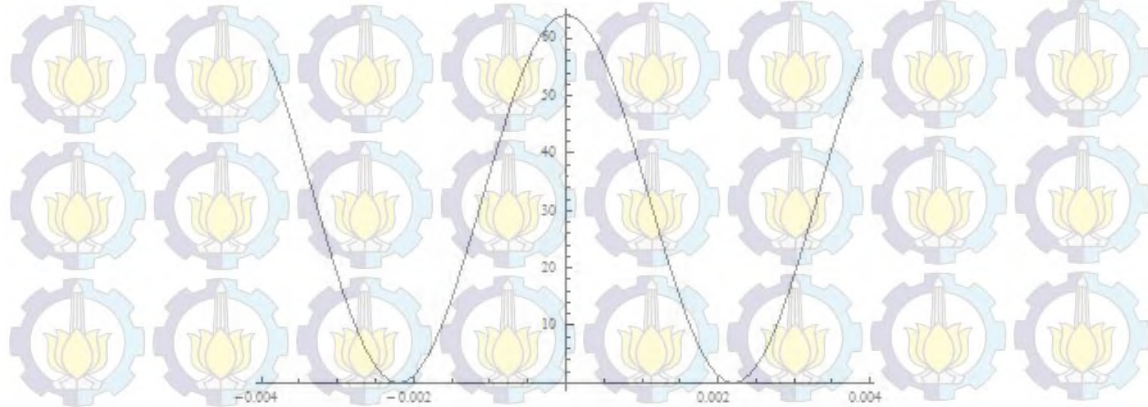
Selanjutnya untuk menghitung Distribusi Probabilitas untuk  $N=4$  celah berikut sama dengan konsep Tiga Celah di atas,

$$\begin{aligned}
 A &= A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \\
 P = |A|^2 &= |A_1 + A_2 + A_3 + A_4|^2 \\
 &= |A_1|^2 + |A_2|^2 + |A_3|^2 + |A_4|^2 + (A_1 A_2^* + A_2 A_1^*) \\
 &\quad + (A_1 A_3^* + A_3 A_1^*) + (A_1 A_4^* + A_4 A_1^*) \\
 &\quad + (A_2 A_3^* + A_3 A_2^*) + (A_2 A_4^* + A_4 A_2^*) \\
 &\quad + (A_3 A_4^* + A_4 A_3^*) \\
 &= P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + I_{12} + I_{13} + I_{14} + I_{23} + I_{24} + I_{34} \\
 &= \frac{\gamma}{2\lambda L\eta} \left( [(C(\alpha_+) + C(\alpha_-))^2 + (S(\alpha_+) + S(\alpha_-))^2]_1 \right. \\
 &\quad + [(C(\alpha_+) + C(\alpha_-))^2 + (S(\alpha_+) + S(\alpha_-))^2]_2 \\
 &\quad + [(C(\alpha_+) + C(\alpha_-))^2 + (S(\alpha_+) + S(\alpha_-))^2]_3 \\
 &\quad + [(C(\alpha_+) + C(\alpha_-))^2 + (S(\alpha_+) + S(\alpha_-))^2]_4 \\
 &\quad + 2 \left( [(C(\alpha_+) + C(\alpha_-))^2 + (S(\alpha_+) + S(\alpha_-))^2]_{12} \right) \\
 &\quad + 2 \left( [(C(\alpha_+) + C(\alpha_-))^2 + (S(\alpha_+) + S(\alpha_-))^2]_{13} \right) \\
 &\quad + 2 \left( [(C(\alpha_+) + C(\alpha_-))^2 + (S(\alpha_+) + S(\alpha_-))^2]_{14} \right) \\
 &\quad + 2 \left( [(C(\alpha_+) + C(\alpha_-))^2 + (S(\alpha_+) + S(\alpha_-))^2]_{23} \right) \\
 &\quad + 2 \left( [(C(\alpha_+) + C(\alpha_-))^2 + (S(\alpha_+) + S(\alpha_-))^2]_{24} \right) \\
 &\quad \left. + 2 \left( [(C(\alpha_+) + C(\alpha_-))^2 + (S(\alpha_+) + S(\alpha_-))^2]_{34} \right) \right) \\
 &= \frac{64}{\pi^2} \frac{1}{N_F \eta \left(1 - \frac{x}{a\eta}\right)^2} \cos^2 \left( \frac{\pi}{2} N_F \eta \left(1 - \frac{x}{a\eta}\right)^2 \right) \quad (1.2)
 \end{aligned}$$

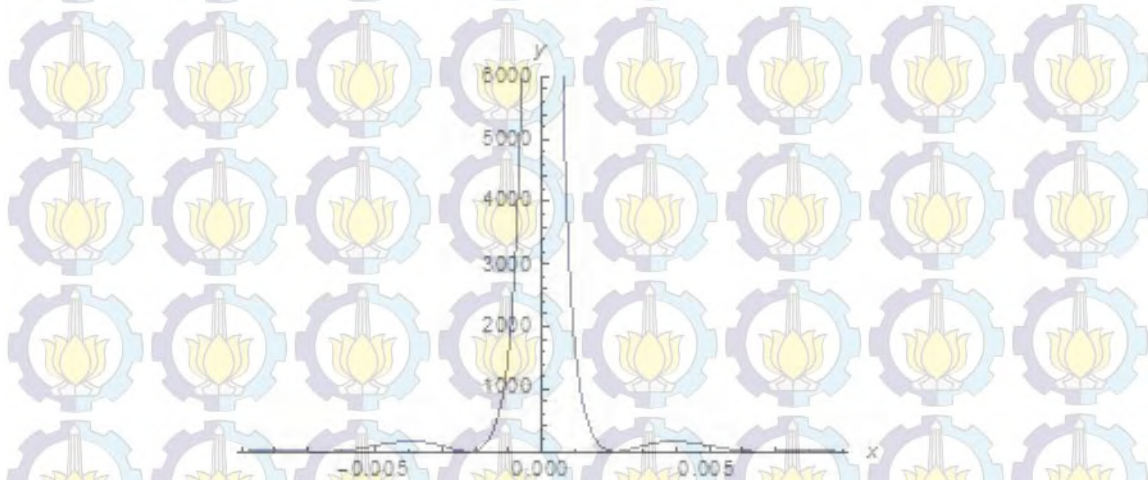


diberikan plot Intensitas 4 celah (Gambar (4.3,4.4)).

Telah didapatkan pola interferensi 3 celah dan 4 celah yang terdeteksi di



Gambar 1.3: Intensitas 4 Celah dengan Lebar celah tidak diperhitungkan



Gambar 1.4: Intensitas 4 Celah dengan Lebar celah tertentu

layar (Gambar 4.1,4.2,4.3,4.4), dimana teori interferensi yang diturunkan dari persamaan lintasan Feynman sama dengan persamaan konvensional (elektrodinamika klasik) dengan perbedaan parameter lebar celah dan jumlah celahnya. Perbedaan terdapat pada penentuan variasi lebar celah dimana lebar penyebaran pola gelap-terang pada layar lebih besar jika lebar celahnya kecil dan semakin banyak celah, maka semakin besar nilai amplitudonya. Kedua metode ini menggunakan pendekatan difraksi Fraunhofer untuk mendapatkan kepastian akan hasil teoretik sama dengan hasil eksperimen (konvensional).

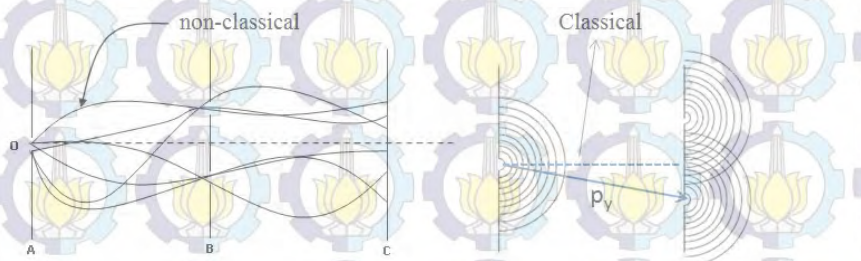


## BAB 1

### Kesimpulan

Dari hubungan antara metode Konvensional dengan metode Feynman dapat disimpulkan sebagai berikut ;

- Metode lintasan Feynman bermakna lebih fisis/ mudah dipahami daripada metode Konvensional karena tinjauan lintasan pada metode Feynman adalah non-klasik (partikel bebas dalam ruang) karena hanya dibatasi jarak dari celah ke layar sedangkan lintasan pada metode Konvensional lebih detail karena dibatasi posisi awal, waktu awal sampai posisi akhir, waktu akhir  $(x_0, t_0) \rightarrow (x_a, t_a)$ , serta keduanya menggunakan pendekatan dualisme gelombang-partikel (gambar (5.1));



Gambar 1.1: Perbandingan Lintasan metode Feynman dengan Lintasan metode Konvensional

- Jika nilai  $N_F$  pada persamaan distribusi probabilitas tidak dihitung, maka representasi grafik yang muncul dari metode Feynman yaitu pada nilai Amplitudo dari titik pusat (terang), titik ke-dua (gelap) dan seterusnya selalu sama, dan pola interferensi yang tertangkap di layar adalah representasi interferensi maksimum dengan intensitas cahaya sama (terang semua) sesuai Gambar (3.8, 4.1, 4.3);
- Jika nilai  $N_F$  pada persamaan distribusi probabilitas dibuat tetap atau berubah-ubah, maka representasi grafik yang muncul dari metode Feynman yaitu fluktuatif (nilai Amplitudo tidak sama) dari titik pusat (terang), titik ke-dua (gelap) dan seterusnya, dan pola interferensi yang tertangkap di layar adalah representasi interferensi maksimum dengan intensitas cahaya tidak sama (terang, redup, agak redup, dan seterusnya) serta interferensi minimum dengan intensitas cahaya sama (semua deretan pola gelap) sesuai Gambar (3.9, 4.2, 4.4);
- Penyebaran difraksi pola gelap-terang pada layar berbanding terbalik dengan ukuran lebar celah sesuai pers. (3.41, 4.1, 4.2);



- Semakin banyak jumlah celah, maka semakin besar nilai Amplitudonya di titik pusat (terang) dikarenakan koefisien dari setiap penambahan celah pada persamaan distribusi probabilitas Feynman semakin besar sehingga hal tersebut bisa direpresentasikan sebagai intensitas cahaya/ tingkat terangnya pola yang tertangkap di layar sesuai Gambar (3.8, 3.9, 4.1, 4.2, 4.3, 4.4).



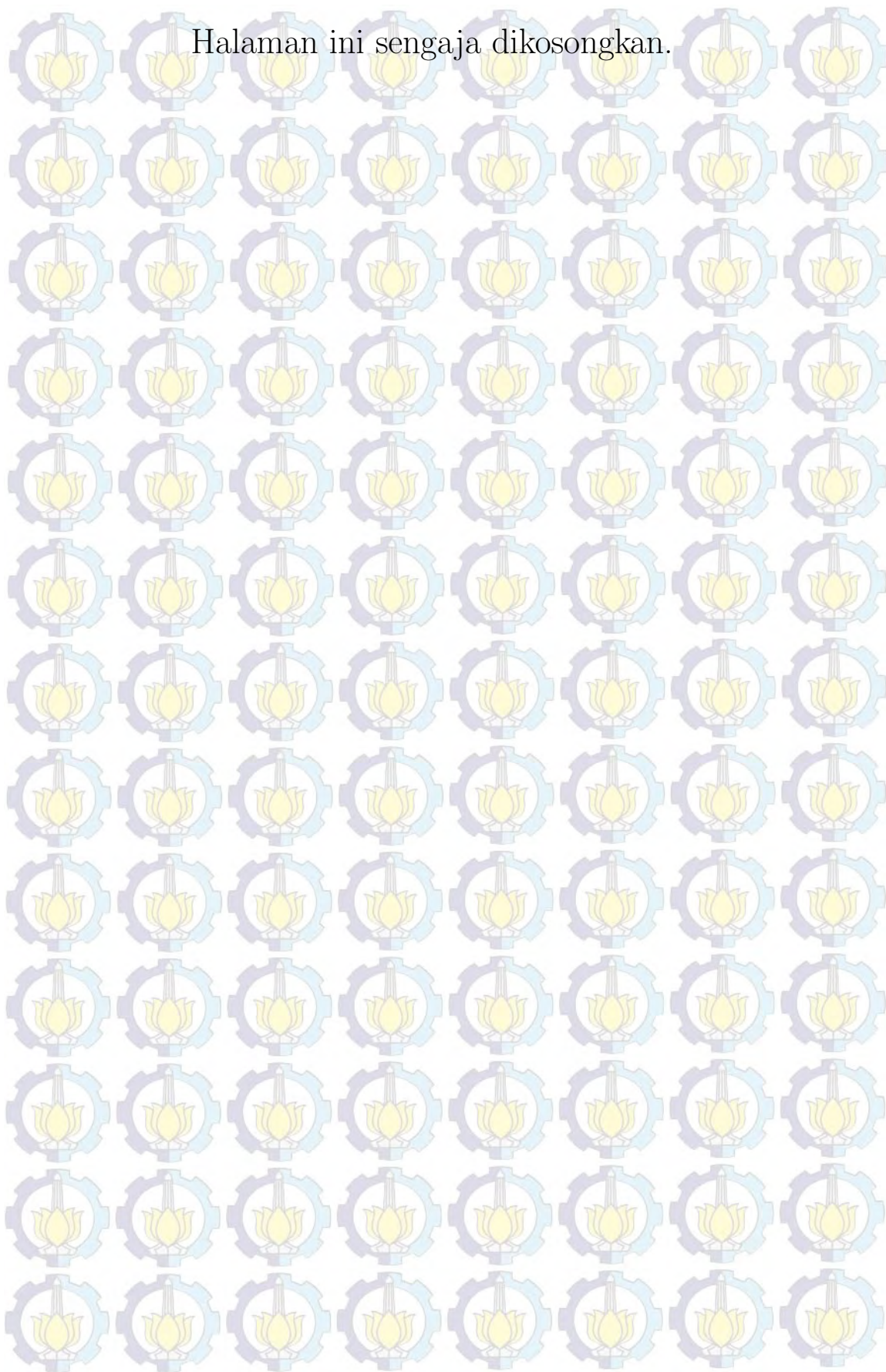


## DAFTAR PUSTAKA

- [1] Banerjee Partha, P., Poon, T.C., *Principles of Applied Optics*, Aksen Associates Incorporated Publishers, 1991
- [2] Beau, M., *Feynman Integral and one/two slits electrons diffraction : an analytic study*, arXiv : 1110.2346v2/EJP, 2012
- [3] del Campo, A., *An Introductory Lecture on Feynman Path Integrals*, Dept of Chemistry Univ of North Carolina at Chapel Hill, USA, Dept of Physical Chemistry, Basque Country Univ, Spain, 2004
- [4] Feynman, R.P., Hibbs, A.R., *Quantum Mechanics and Path Integral*, McGraw-Hill, New York, 3rd.ed, 1965
- [5] Feynman, R.P., Leighton, R.B., Sands, M.L., *The Feynman Lectures on Physics Vol.3*, Addison-Wesley, Reading Mass, 1963
- [6] Latifah, E., *Integral Lintas Feynman Efek Casimir*, Tesis Fisika ITS, 2008
- [7] Rahul, S., Samuel, S., Aninda, S., Supurna, S., Urbasi, S., Tuleja, S., *Non-classical Paths in Quantum Interference Experiments*, Phys. Rev. Lett 113, 120406, 2014
- [8] Rattazzi, R., *The Path Integral approach to Quantum Mechanics*, Lecture Notes IV, 2009
- [9] Sanabria, H., Rodriguez-Lara, B.M., *An Introduction to quantum interferometry: Young's experiment with fock and coherent states*, Revista Mexicana de Fisica E 53(1) 97-105, 2007
- [10] Thomas, V.M., *Quantum Interference with Slits*, Dept of Physics and Applied Physics Univ of Massachusetts Lowell, MA, USA, 2000
- [11] Yabuki, H., *Feynman Path Integrals in the Young Double-Slit Experiment*, Int. J. Theor. Phys 25:2, 159-174, 1986



Halaman ini sengaja dikosongkan.





## LAMPIRAN A

### INTERFERENSI DALAM TINJAUAN KLASIK

#### A.1 Persamaan Maxwell

Dalam teori elektromagnetik, memiliki empat kuantitas yang disebut medan elektromagnetik antara lain kekuatan medan listrik  $E(V/m)$ , densitas fluks listrik  $D(C/m^2)$ , kekuatan medan magnetik  $H(A/m)$  dan densitas fluks magnetik  $B(Wb/m^2)$ . Berikut formula diferensial

$$\nabla \bullet D = \rho \quad (A.1)$$

$$\nabla \bullet B = 0 \quad (A.2)$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (A.3)$$

$$\nabla \times H = J = J_c + \frac{\partial D}{\partial t} \quad (A.4)$$

dimana  $J$  adalah densitas arus ( $A/m^2$ ) dan  $\rho$  adalah densitas muatan listrik ( $C/m^3$ ).  $J_c$  dan  $\rho$  adalah sumber medan elektromagnetik.

#### A.2 Solusi Gelombang Berjalan

Diturunkan persamaan gelombang berdasar persamaan Maxwell dalam sistem koordinat yang berbeda untuk menjelaskan penjalaran medan listrik dan medan magnetik. Secara umum solusi koordinat sistem diberikan

$$\nabla \times \nabla \times E = -\nabla \times \frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times B) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times H) \quad (A.5)$$

diasumsikan  $\mu$  tidak bergantung ruang dan waktu, maka persamaan di atas menjadi

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times E &= -\mu \epsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial J_c}{\partial t} \\ \nabla^2 E - \mu \epsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} &= \mu \frac{\partial J_c}{\partial t} + \nabla (\nabla \bullet E) \end{aligned} \quad (A.6)$$

kemudian diasumsikan  $\epsilon$  menjadi tidak bergantung waktu dengan menggunakan hubungan vektor

$$\nabla \times \nabla \times A = \nabla (\nabla \bullet A) - \nabla^2 A \quad (A.7)$$

Jika diasumsikan permitivitas  $\epsilon$  tidak bergantung ruang, maka persamaan Maxwell di atas menjadi

$$\nabla \bullet E = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (A.8)$$



Persamaan di atas dipisah menjadi beberapa komponen  $E$ , untuk operator Laplacian ( $\nabla^2$ ) dalam koordinat kartesian  $(x, y, z)$ , koordinat silindris  $(r, \phi, z)$  dan koordinat sferis  $(R, \theta, \phi)$  diberikan

$$\nabla_{\text{rect}}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\text{A.9})$$

$$\nabla_{\text{cyl}}^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\text{A.10})$$

$$\nabla_{\text{sph}}^2 = \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\arctan \theta}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (\text{A.11})$$

Untuk ruang bebas di semua sumber ( $J_c = 0, \rho = 0$ ) persamaan gelombangnya direduksi menjadi

$$\nabla^2 E = \mu\epsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad (\text{A.12})$$

Persamaan yang sama bisa diturunkan untuk medan magnetik  $H$

$$\nabla^2 H = \mu\epsilon \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} \quad (\text{A.13})$$

Kuantitas  $\mu\epsilon$  memiliki unit  $(1/\text{velocity})^2$  didefinisikan

$$\nu^2 = \frac{1}{\mu\epsilon} \quad (\text{A.14})$$

Untuk ruang bebas,  $\mu = \mu_0$ ,  $\epsilon = \epsilon_0$  dan  $\nu = c$ . Kita bisa menghitung nilai  $c$  dari nilai  $\epsilon_0$  dan  $\mu_0$  dimana  $3 \times 10^8 \text{ m/s}$ . Perhitungan awal secara teoretik yang dilakukan oleh Maxwell dimana sesuai dengan yang terukur oleh Fizeau yaitu  $(315, 300 \text{ km/s})$  sehingga Maxwell menyimpulkan bahwa cahaya adalah gangguan elektromagnetik dari penalaran gelombang melalui medan elektromagnetik yang bergantung pada hukum elektromagnetik. Kemudian solusi koordinat sistem berikut secara sederhana

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \nu^2 \nabla^2 \psi = 0 \quad (\text{A.15})$$

dimana  $\psi$  merepresentasikan komponen medan listrik  $E$  atau medan magnetik  $H$  dan dimana  $\nu$  adalah kecepatan gelombang.

Dalam koordinat kartesian, solusi umum diberikan

$$\begin{aligned} \psi(x, y, z, t) = & c_1 f(\omega_0 t - k_{0x}x - k_{0y}y - k_{0z}z) \\ & + c_2 g(\omega_0 t + k_{0x}x + k_{0y}y + k_{0z}z) \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

dengan syarat

$$\frac{\omega_0^2}{k_{0x}^2 + k_{0y}^2 + k_{0z}^2} = \frac{\omega_0^2}{k_0^2} = \nu^2 \quad (\text{A.17})$$



dimana  $\omega_0$  adalah frekuensi sudut dari gelombang ( $rad/s$ ) dan  $k_0$  adalah konstanta propagasi dalam medium  $rad/m$ . Jika perbandingan  $\omega_0/k_0$  konstan, maka dapat dikatakan propagasinya non-dispersif, berikut didefinisikan kembali

$$\psi(x, y, z, t) = c_1 f(\omega_0 t - k_0 \bullet R) + c_2 g(\omega_0 t - k_0 \bullet R) \quad (A.18)$$

dimana

$$R = xa_x + ya_y + za_z \quad (A.19)$$

$$k_0 = k_{0x}a_x + k_{0y}a_y + k_{0z}a_z \quad (A.20)$$

$k_0$  disebut vektor propagasi dan  $|k_0| = k_0$ ;  $a_x, a_y, a_z$ , sehingga solusi umumnya menjadi

$$\psi(z, t) = c_1 f(\omega_0 t - k_0 z) + c_2 g(\omega_0 t + k_0 z) \quad (A.21)$$

### A.3 Fungsi Transfer Spasial dan Difraksi Fresnel

Dalam bab ini, diasumsikan fungsi gelombang total  $\psi(x, y, z, t)$  dibandingkan dengan fungsi kompleks  $\psi_e(x, y, z)$  dengan frekuensi  $\omega_0$  dan konstanta propagasi  $k_0$  menjalar di sumbu-z

$$\psi(x, y, z, t) = \text{Re}(\psi_e(x, y, z) \exp(j(\omega_0 t - k_0 z))) \quad (A.22)$$

fungsi kompleks  $\psi_e$  dihubungkan dengan fasor  $\psi_p$  diberikan

$$\psi_p(x, y, z) = \psi_e(x, y, z) \exp(-jk_0 z) \quad (A.23)$$

akan didapatkan persamaan gelombang paraksial

$$2jk_0 \frac{\partial \psi_e}{\partial z} = \frac{\partial^2 \psi_e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_e}{\partial y^2} \quad (A.24)$$

Persamaan ini mendeskripsikan penjalaran  $\psi_e$  dimulai dari keadaan awal, dimana diberikan

$$\psi_e = \psi_{e0}(x, y) \quad (A.25)$$

Pemecahan masalah persamaan gelombang paraksial menggunakan teknik transformasi Fourier karena teknik ini membantu kita dalam memahami difraksi dari konsep fungsi transfer sederhana dan nantinya dihubungkan dengan difraksi Fresnel. Diasumsikan  $\psi_e$  diubah ke transformasi Fourier,

$$\frac{d\Psi_e}{dz} = \frac{j}{2k_0} (k_x^2 + k_y^2) \Psi_e \quad (A.26)$$

dimana  $\Psi_e(k_x, k_y, z)$  adalah transformasi Fourier dari  $\psi_e(x, y, z)$ , dari persamaan tersebut diperoleh

$$\Psi_e(k_x, k_y, z) = \Psi_{e0}(k_x, k_y) \exp\left(\frac{j(k_x^2 + k_y^2)z}{2k_0}\right) \quad (A.27)$$



dimana

$$\Psi_{e0}(k_x, k_y) = \Psi_e(k_x, k_y, z = 0) = F(\psi_{e0}(x, y)) \quad (\text{A.28})$$

Untuk  $\Psi_p(k_x, k_y, z) = \Psi_e(k_x, k_y, z)e^{-jk_0z}$  sebagai spektrum gelombang planar dari  $\psi_e(x, y, z)$ . Diasumsikan sistem linier dengan  $\Psi_{e0}(k_x, k_y)$  sebagai spektrum input dan  $\Psi_e(k_x, k_y, z)$  sebagai spektrum output. Kemudian respon frekuensi spasial dari sistem linier diberikan

$$\frac{\Psi_e}{\Psi_{e0}} = H(k_x, k_y, z) = \exp\left(\frac{j(k_x^2 + k_y^2)z}{2k_0}\right) \quad (\text{A.29})$$

dengan  $H(k_x, k_y, z)$  disebut fungsi transfer propagasi spasial dari cahaya yang melewati di sumbu  $z$  dalam medium, berikut ini respon impuls spasial

$$\begin{aligned} h(x, y, z) &= F_{xy}^{-1}(H(k_x, k_y, z)) \\ &= \frac{jk_0}{2\pi z} \exp\left(-\frac{j(x^2 + y^2)k_0}{2z}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

Kemudian dari persamaan ini didapatkan lebih lanjut

$$\begin{aligned} \psi_e(x, y, z) &= \psi_{e0}(x, y) * h(x, y, z) \\ &= \frac{jk_0}{2\pi z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{e0}(x', y') \\ &\quad \times \exp\left(-j\frac{k_0}{2z} \left((x - x')^2 + (y - y')^2\right)\right) dx' dy' \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

Dapat ditulis kembali, detailnya seperti berikut

$$\begin{aligned} \psi_p(x, y, z) &= \frac{jk_0}{2\pi z} \exp(-jk_0z) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{p0}(x', y') \\ &\quad \times \exp\left(-j\frac{k_0}{2z} \left((x - x')^2 + (y - y')^2\right)\right) dx' dy' \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

dimana

$$\psi_{p0}(x, y) = \psi_p(x, y, z = 0) = \psi_e(x, y, z = 0) = \psi_{e0}(x, y) \quad (\text{A.33})$$

### A.3.1 Gelombang Planar melewati Apertur Persegi

Menggunakan persamaan di atas,

$$\begin{aligned} \psi_e(x, y, z) &= \frac{jk_0}{2\pi z} \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{x'}{1}\right) \text{rect}\left(\frac{y'}{1}\right) \\ &\quad \times \exp\left(-j\frac{k_0}{2z} \left((x - x')^2 + (y - y')^2\right)\right) dx' dy' \\ &= \frac{jk_0}{2\pi z} g(x)g(y) \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$



dimana

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{-l/2}^{l/2} \exp \left( -j \frac{k_0}{2z} (x' - x)^2 \right) dx' \\ g(y) &= \int_{-l/2}^{l/2} \exp \left( -j \frac{k_0}{2z} (y' - y)^2 \right) dy' \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

Integral ini disederhanakan melalui variabel baru berikut ini

$$\zeta = \left( \frac{k_0}{\pi z} \right)^{1/2} (x' - x), \quad \eta = \left( \frac{k_0}{\pi z} \right)^{1/2} (y' - y) \quad (\text{A.36})$$

Secara lengkap persamaannya adalah

$$\begin{aligned} g(x) &= \left( \frac{\pi z}{k_0} \right)^{1/2} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \exp \left( -j \frac{\pi}{2} \zeta^2 \right) d\zeta \\ g(y) &= \left( \frac{\pi z}{k_0} \right)^{1/2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \exp \left( -j \frac{\pi}{2} \eta^2 \right) d\eta \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

dimana

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= - \left( \frac{k_0}{\pi z} \right)^{1/2} \left( \frac{l}{2} + x \right) \\ \zeta_2 &= \left( \frac{k_0}{\pi z} \right)^{1/2} \left( \frac{l}{2} - x \right) \\ \eta_1 &= - \left( \frac{k_0}{\pi z} \right)^{1/2} \left( \frac{l}{2} + y \right) \\ \eta_2 &= \left( \frac{k_0}{\pi z} \right)^{1/2} \left( \frac{l}{2} - y \right) \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

Kemudian disusun kembali menjadi berikut ini

$$\begin{aligned} g(x) &= \left( \frac{\pi z}{k_0} \right)^{1/2} ((C(\zeta_2) + C(\zeta_1)) + (jS(\zeta_2) + S(\zeta_1))) \\ g(y) &= \left( \frac{\pi z}{k_0} \right)^{1/2} ((C(\eta_2) + C(\eta_1)) + (jS(\eta_2) + S(\eta_1))) \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

dimana  $C(\alpha)$  dan  $S(\alpha)$  disebut integral Fresnel, didefinisikan

$$C(\alpha) = \int_0^\alpha \cos \frac{\pi t^2}{2} dt, \quad S(\alpha) = \int_0^\alpha \sin \frac{\pi t^2}{2} dt \quad (\text{A.40})$$

### A.3.2 Interferensi 1 Celah dengan Lebar Tertentu

Dari persamaan di atas ditulis kembali berikut ini

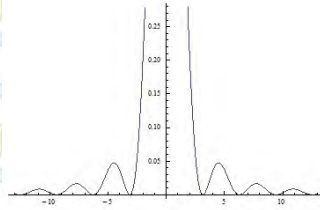
$$\psi_{e0}(x, y) = \text{rect} \left( \frac{x}{l_x} \right) \quad (\text{A.41})$$



Kemudian diambil transformasi Fourier dalam sumbu-x menggunakan persamaan tersebut

$$F_x \left( \text{rect} \left( \frac{x}{l_x} \right) \right) = l_x \text{sinc} \left( \frac{l_x k_x}{2\pi} \right) \quad (\text{A.42})$$

Direpresentasikan sebagai hasil dari persamaan di atas berikut ini Gambar (A.1)



Gambar A.1: Intensitas 1 Celah dengan Lebar celah tertentu

### A.3.3 Interferensi 2 Celah dengan Lebar Tertentu

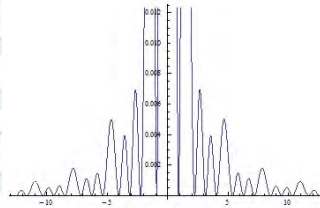
Dikenal secara umum yaitu eksperimen dua celah Young, didefinisikan dari hubungan persamaan di atas

$$\psi_{e0} = \left( \delta \left( x - \frac{d}{2} \right) + \delta \left( x + \frac{d}{2} \right) \right) \delta(y) \quad (\text{A.43})$$

Eksperimen ini menghasilkan interferensi sebagai berikut

$$\begin{aligned} \psi_p &\propto F_{xy} \left( \left( \delta \left( x - \frac{d}{2} \right) + \delta \left( x + \frac{d}{2} \right) \right) \delta(y) \right) \\ &= \left( \exp \left( -\frac{jk_x d}{2} \right) + \exp \left( \frac{jk_x d}{2} \right) \right) \\ &\propto \cos \left( \frac{k_0 x}{2z} d \right) \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

Diberikan representasi dari persamaan tersebut Gambar (A.2)



Gambar A.2: Intensitas 2 Celah dengan Lebar celah tertentu



## LAMPIRAN B

### MATRIKS-S

#### B.1 Gambaran Schrodinger, Heisenberg dan Interaksi

Dalam teori kuantum dikenal 3 bentuk gambaran yakni gambaran Schrodinger, Heisenberg dan Interaksi. Tiga bentuk gambaran ini memiliki cara yang berbeda dalam menggambarkan pertambahan waktu dari suatu sistem. Dalam gambaran Schrodinger ada keadaan bergantung waktu yang berdasar pada persamaan Schrodinger

$$i\hbar \frac{d}{dt} |A, t\rangle_S = H |A, t\rangle_S \quad (B.1)$$

Persamaan ini dapat diselesaikan jika sistem keadaan diganti dengan waktu awal  $t_0$

$$|A, t\rangle_S = U |A, t_0\rangle_S \quad (B.2)$$

dimana  $U$  adalah operator uniter, dinyatakan dengan

$$U \equiv U(t, t_0) = \exp \left\{ \frac{-iH(t - t_0)}{\hbar} \right\} \quad (B.3)$$

Simbol  $U$  disini menjelaskan keadaan transformasi uniter dan operator  $O$  dari gambaran Schrodinger ke gambaran Heisenberg, didefinisikan

$$|A, t\rangle_H = U^\dagger |A, t\rangle_S = |A, t_0\rangle_S \quad (B.4)$$

$$O^H(t) = U^\dagger O^S U \quad (B.5)$$

Pada  $t = t_0$  keadaan dan operator dari dua gambaran tersebut sama, dapat dilihat pada persm.(B.4) dimana vektor keadaan gambaran Heisenberg konstan tidak bergantung waktu. Operator Heisenberg kebergantungan waktu dari persm.(B.5) maka

$$H^H = H^S \equiv H \quad (B.6)$$

Jika transformasi dari gambaran Schrodinger ke gambaran Heisenberg adalah Uniter maka dapat dipastikan hubungan matriks elemen dan komutasinya invarian

$$\langle B, t | O^S | A, t \rangle_S = \langle B, t | O^H(t) | A, t \rangle_H \quad (B.7)$$



Jika  $O$  dan  $P$  adalah 2 operator yang memiliki  $[O^S, P^S] = \text{konstan}$  kemudian  $[O^H(t), P^H(t)] = \text{konstan}$ . Dari persm.(B.5) diturunkan dan memberikan persamaan gerak Heisenberg

$$\begin{aligned}
i\hbar \frac{d}{dt} &= i\hbar \frac{d}{dt} (U^\dagger O^S U) \\
&= i\hbar \frac{d}{dt} \left( (e^{-iH(t-t_0)/\hbar})^\dagger O^S (e^{-iH(t-t_0)/\hbar}) \right) \\
&= i\hbar \frac{d}{dt} (e^{iH(t-t_0)/\hbar} O^S e^{-iH(t-t_0)/\hbar}) \\
&= i\hbar \left( \frac{iH}{\hbar} e^{iH(t-t_0)/\hbar} O^S e^{-iH(t-t_0)/\hbar} + e^{iH(t-t_0)/\hbar} O^S \frac{-iH}{\hbar} e^{-iH(t-t_0)/\hbar} \right) \\
&= -H e^{iH(t-t_0)/\hbar} O^S e^{-iH(t-t_0)/\hbar} + e^{iH(t-t_0)/\hbar} O^S H e^{-iH(t-t_0)/\hbar} \\
&= -H U^\dagger O^S U + U^\dagger O^S H U \\
&= -H O^S U^\dagger U + U^\dagger U O^S H \\
&= -H O^S + O^S H \\
&= O^S H - H O^S \\
&= [O^S, H] \\
&= [O^H(t), H]
\end{aligned} \tag{B.8}$$

Untuk yang bergantung waktu dalam gambaran Schrodinger secara klasik ada hubungan kuantitas yang mempunyai kebergantungan waktu, secara eksplisit

$$i\hbar \frac{d}{dt} O^H = i\hbar \frac{d}{dt} O^H(t) + [O^H(t), H] \tag{B.9}$$

Gambaran Interaksi muncul jika ada interaksi medan, maka Hamiltoniannya menjadi 2 bagian

$$H = H_0 + H_I \tag{B.10}$$

Dan gambaran Interaksi tersebut dihubungkan ke gambaran Schrodinger oleh transformasi uniter

$$U_0 \equiv U_0(t, t_0) = e^{-iH_0(t-t_0)/\hbar} \tag{B.11}$$

Keadaan gambaran interaksi didefinisikan

$$|A, t\rangle_I = U_0^\dagger |A, t\rangle_S \tag{B.12}$$

Dan operator gambaran Interaksi

$$O^I(t) = U_0^\dagger O^S U_0 \tag{B.13}$$

Jadi hubungan antara gambaran Interaksi dan gambaran Schrodinger sama dengan hubungan antara gambaran Heisenberg dan gambaran Schrodinger namun transformasi uniter  $U_0$  melibatkan  $H_0$  bahkan melibatkan  $H$ , dari  $H_0^I = H_0^S = H_0$ .



Dari persm.(B.10) diturunkan dan memberikan persamaan gerak diferensial dari operator gambaran Interaksi (analogi persm.(B.13))

$$i\hbar \frac{d}{dt} O^I(t) = [O^I(t), H_0] \quad (\text{B.14})$$

Dari persm.(B.9) disubstitusi ke persamaan Schrodinger (B.12), dimana didapatkan persamaan gerak vektor keadaan dalam gambaran Interaksi maka

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} |A, t\rangle_S &= i\hbar \frac{d}{dt} \left( U_0^\dagger |A, t\rangle_I \right) \\ &= i\hbar \frac{d}{dt} \left( \left( e^{-iH_0(t-t_0)/\hbar} \right)^\dagger |A, t\rangle_I \right) \\ &= i\hbar \frac{d}{dt} e^{iH_0(t-t_0)/\hbar} |A, t\rangle_I \\ &= i\hbar \left( \frac{iH_0}{\hbar} e^{iH_0(t-t_0)/\hbar} |A, t\rangle_I + e^{iH_0(t-t_0)/\hbar} \frac{d}{dt} |A, t\rangle_I \right) \\ &= -H_0 e^{iH_0(t-t_0)/\hbar} |A, t\rangle_I + e^{iH_0(t-t_0)/\hbar} i\hbar \frac{d}{dt} |A, t\rangle_I \\ &= -H_0 e^{iH_0(t-t_0)/\hbar} |A, t\rangle_I + e^{iH_0(t-t_0)/\hbar} H_I |A, t\rangle_I \\ &= e^{iH_0(t-t_0)/\hbar} |A, t\rangle_I (H_I - H_0) \\ &= e^{iH_0(t-t_0)/\hbar} |A, t\rangle_I H_I^S U_0 \\ &= e^{iH_0(t-t_0)/\hbar} |A, t\rangle_I H_I^S e^{-iH_0(t-t_0)/\hbar} \\ &= H_I^S |A, t\rangle_I \\ &= H_I^I |A, t\rangle_I \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

dimana

$$H_I^I(t) = e^{iH_0(t-t_0)/\hbar} H_I^S e^{-iH_0(t-t_0)/\hbar} \quad (\text{B.16})$$

Gambaran Interaksi dan gambaran Heisenberg dapat dihubungkan dengan transformasi uniter oleh karena itu persm.(B.16) menjadi

$$\begin{aligned} H_I^I &= e^{iH_0(t-t_0)/\hbar} e^{-iH_0(t-t_0)/\hbar} H_I^S e^{iH_0(t-t_0)/\hbar} e^{-iH_0(t-t_0)/\hbar} \\ &= U^\dagger H_I^S U \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Operator translasi waktu adalah matriks uniter yang berkerja pada ruang vektor sebagai keadaan yang mungkin. Semua harus bersifat uniter karena vektor keadaannya adalah probabilitas total yang harus konservatif. Hubungan dua gambaran Schrodinger dan Heisenberg

$$\langle t | \phi(t_0) | t \rangle = \langle t_0 | \phi(t) | t_0 \rangle \quad (\text{B.18})$$

Berikut gambaran Heisenberg

$$\phi(t) = U^{-1}(t, t_0) \phi(t_0) U(t, t_0) \quad (\text{B.19})$$

$$[H, \phi(z, t)] = -i \frac{\partial \phi(z, t)}{\partial t} \quad [H, \pi(z, t)] = -i \frac{\partial \pi(z, t)}{\partial t} \quad (\text{B.20})$$

$$[H, \phi(z, t)] = \left( \int_0^L dz' \frac{1}{2} \left( v^2 \pi^2(z', t) + \left( \frac{\partial \phi(z', t)}{\partial z'} \right)^2 \right), \phi(z, t) \right) \quad (\text{B.21})$$



Kemudian jika persamaan tersebut dihubungkan dengan Hubungan Komutasi Kanonik, sebagai berikut

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\nu^2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right) \\ &= \mathcal{L} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)\end{aligned}\quad (\text{B.22})$$

Dari persm.(B.20) didapatkan

$$\pi(z, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)} = \frac{1}{\nu^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (\text{B.23})$$

Hubungan komutasi untuk medan kontinu

$$\begin{aligned}\left[ \phi(z, t), \pi(z', t) \right] &= i\delta(z - z') \\ \left[ \pi(z, t), \pi(z', t) \right] &= 0 \\ \left[ \phi(z, t), \phi(z', t) \right] &= 0\end{aligned}\quad (\text{B.24})$$

Dari hubungan persm.(B.24) maka persm.(B.20) menjadi

$$\begin{aligned}-i \frac{\partial \phi(z, t)}{\partial t} &= [H, \phi(t)] \\ &= U^{-1} [H, \phi(t)] U \\ &= -i U^{-1} \frac{\partial \phi(z, t)}{\partial t} U \\ &= -i \frac{\partial}{\partial t} U^{-1} \phi(z, t) U\end{aligned}\quad (\text{B.25})$$

Secara sederhana, kita mengabaikan kebergantungan  $\phi$  terhadap  $z$

$$\begin{aligned}\phi(z, t) &\rightarrow \phi(t) \\ [H, \phi(t)] &= -i \left( \frac{\partial}{\partial t} U^{-1}(t, t_0) \phi(t_0) U + U^{-1} \phi(t_0) \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) \right)\end{aligned}\quad (\text{B.26})$$

dengan

$$U^{-1} H U = H \quad (\text{B.27})$$

Akan memberikan dampak

$$\left( \frac{d}{dt} U \right) U^{-1} + U \frac{d}{dt} U^{-1} = 0 \quad (\text{B.28})$$



Persm.(B.26) dapat disusun kembali sebagai berikut

$$\begin{aligned}
[H, \phi(t)] &= -iU \left( \frac{d}{dt} U^{-1}(t, t_0) \phi(t_0) U + U^{-1} \phi(t_0) \frac{d}{dt} U(t, t_0) \right) \\
&= i \left( \frac{d}{dt} U(t, t_0) U^{-1} \phi(t_0) - \phi(t_0) \left( \frac{d}{dt} U(t, t_0) \right) U^{-1} \right) \\
&= i \left( \left( \frac{d}{dt} U(t, t_0) \right) U^{-1}, \phi(t_0) \right) \\
0 &= [H, \phi(t)] - i \left( \left( \frac{d}{dt} U(t, t_0) \right) U^{-1}, \phi(t_0) \right) \\
0 &= [H, \phi(t_0)] + \left( -i \left( \frac{d}{dt} U(t, t_0) \right) U^{-1}, -i \phi(t_0) \right) \quad (B.29)
\end{aligned}$$

Komut dengan semua

$$\phi(t_0) = -i \phi(t_0) \quad (B.30)$$

Bisa komut jika ada perkalian identitas (Schur's Lemma)

$$\begin{aligned}
\left( \left( H - i \left( \frac{dU}{dt} \right) U^{-1} \right), \phi(t_0) \right) &= 0 \\
H - i \left( \frac{dU}{dt} \right) U^{-1} &= \\
H &= i \left( \frac{dU}{dt} \right) U^{-1} + E_0 \quad (B.31)
\end{aligned}$$

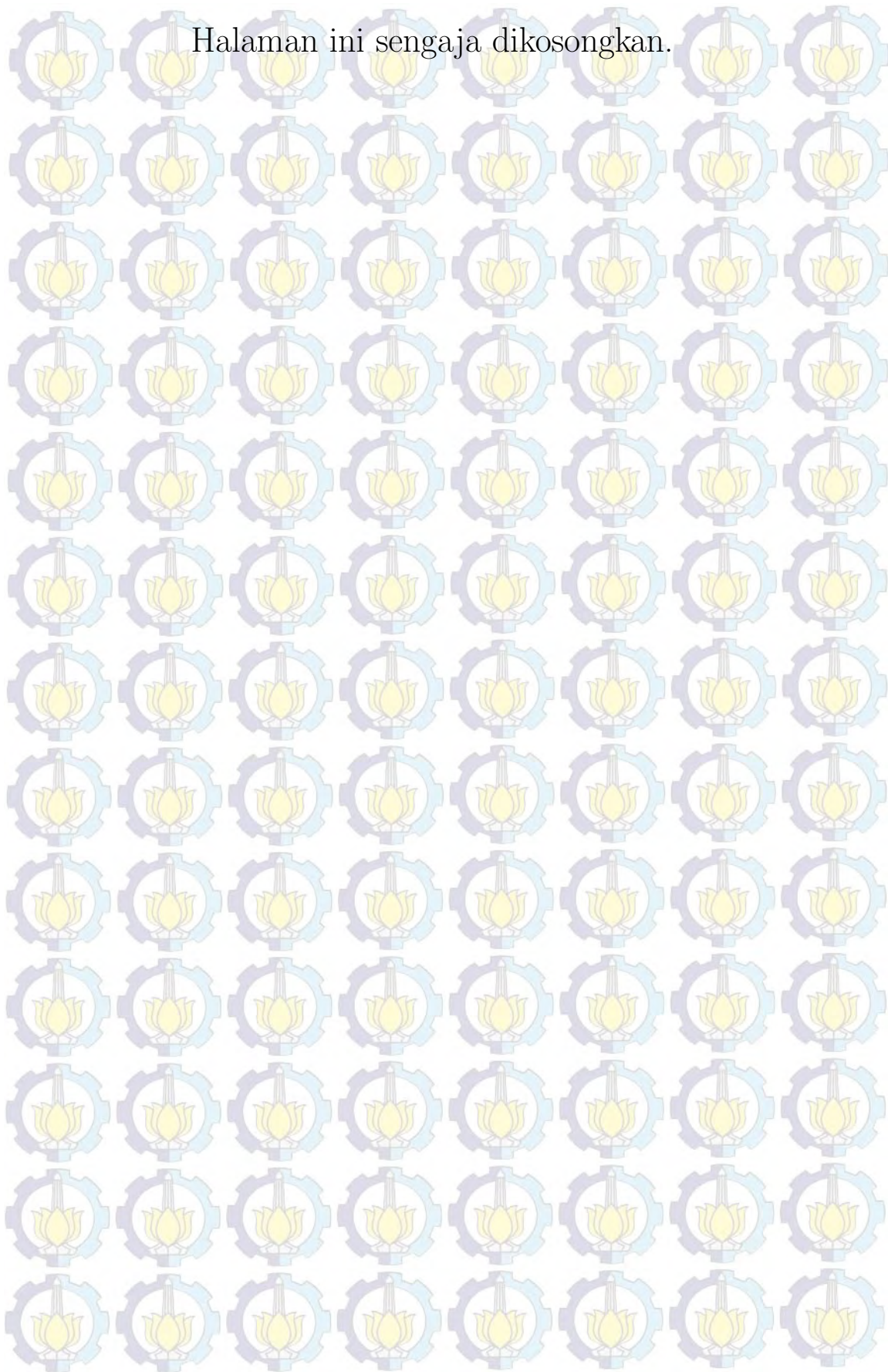
Maka dari persm.(B.31) didapatkan

$$\begin{aligned}
\frac{dU}{dt} &= -i(H - E_0) U \\
U(t, t_0) &= e^{-i(H-E_0)(t-t_0)} \quad (B.32)
\end{aligned}$$

Secara umum  $H$  bergantung waktu dalam hal Interaksi, jika  $E_0$  dipilih nilai ekspektasi keadaan dasar dari  $H$  maka  $H - E_0$  memiliki nilai ekspektasi keadaan dasar sama dengan nol karena  $i = 0$  tidak termasuk keadaan dasar, seharusnya  $i = 1$  maka  $E_0 = 0$ .



Halaman ini sengaja dikosongkan.





## LAMPIRAN C

### INTEGRAL LINTAS FEYNMAN

#### C.1 Keadaan Basis

Sistem mekanika kuantum 1D, keadaan operator eigen koordinat

$$\hat{x} |x\rangle = x |x\rangle \quad (\text{C.1})$$

Keadaan eigen di atas mendefinisikan basis orthonormal

$$\langle x | x' \rangle = \delta(x - x') \quad (\text{C.2})$$

dan memenuhi syarat kelengkapan

$$\int dx |x\rangle \langle x| = I \quad (\text{C.3})$$

Diberikan representasi ruang koordinat operator momentum

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \quad (\text{C.4})$$

Komutator ini memberikan hubungan matriks

$$\begin{aligned} \langle x'' | [\hat{x}, \hat{p}] | x' \rangle &= i\hbar \langle x'' | x' \rangle \\ &= i\hbar \delta(x'' - x') \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

di sisi lain

$$\begin{aligned} \langle x'' | [\hat{x}, \hat{p}] | x' \rangle &= \langle x'' | (\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x}) | x' \rangle \\ &= (x'' - x') \langle x'' | \hat{p} | x' \rangle \\ &= i\hbar \delta(x'' - x') \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Kemudian diberikan integral perkalian fungsi delta  $\delta(x)$  berikut

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \frac{d}{dx} \delta(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx \quad (\text{C.7})$$

atau

$$x \frac{d}{dx} \delta(x) = -\delta(x) \quad (\text{C.8})$$

Dengan demikian

$$\begin{aligned} \langle x'' | \hat{p} | x' \rangle &= -i\hbar \frac{d}{dx''} \langle x'' | x' \rangle \\ &= -i\hbar \frac{d}{dx''} \delta(x'' - x') \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$



didapatkan

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx} \quad (\text{C.10})$$

Untuk representasi momentum, keadaan eigen didefinisikan

$$\hat{p} |p\rangle = p |p\rangle \quad (\text{C.11})$$

Seperti pada representasi koordinat, keadaan eigen momentum memenuhi ortonormalitas dan syarat kelengkapan

$$\begin{aligned} \langle p | p' \rangle &= \delta(p - p') \\ \int dp |p\rangle \langle p| &= 1 \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

Operator koordinat  $\hat{x}$  dalam representasi momentum diberikan

$$\hat{x} = i\hbar \frac{d}{dp} \quad (\text{C.13})$$

Perkalian skalar antara basis momentum dan koordinat menghasilkan matriks operator antara kedua basis

$$\langle p | x \rangle = \langle x | p \rangle^* = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{i}{\hbar} px} \quad (\text{C.14})$$

dapat dibuktikan, dari persm (C.11), didapatkan

$$\langle x | \hat{p} | p \rangle = p \langle x | p \rangle \quad (\text{C.15})$$

Penerapan syarat kelengkapan terhadap hubungan di atas memberikan

$$\begin{aligned} \langle x | \hat{p} | p \rangle &= \int \langle x | \hat{p} | x' \rangle \langle x' | p \rangle dx' \\ &= -i\hbar \frac{d}{dx} \int \langle x | x' \rangle \langle x' | p \rangle dx' \\ &= -i\hbar \frac{d}{dx} \int \delta(x - x') \langle x' | p \rangle dx' \\ &= -i\hbar \frac{d}{dx} \langle x | p \rangle \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

Ini berarti

$$-i\hbar \frac{d}{dx} \langle x | p \rangle = p \langle x | p \rangle \quad (\text{C.17})$$

Solusi bagi  $\langle x | p \rangle$  seperti pada persm (C.14). Selanjutnya didefinisikan fungsi  $f(x)$  sebagai proyeksi vektor keadaan  $|f\rangle$  pada vektor basis  $|x\rangle$

$$f(x) = \langle x | f \rangle \quad (\text{C.18})$$



Dengan memanfaatkan definisi basis dan syarat kelengkapan, maka transformasi Fourier dapat diungkapkan

$$\begin{aligned} f(x) = \langle x | f \rangle &= \int dp \langle x | p \rangle \langle p | f \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp e^{\frac{i}{\hbar}px} f(p) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk e^{ikx} F(k) \end{aligned} \quad (C.19)$$

dengan  $F(k) = \sqrt{\hbar} f(p)$ .

Transformasi Fourier invers nya

$$\begin{aligned} F(k) &= \sqrt{\hbar} \langle p | f \rangle \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\pi\hbar}} \int dx \langle p | x \rangle \langle x | f \rangle \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\pi\hbar}} \int dx e^{-\frac{i}{\hbar}px} f(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx e^{-ikx} f(x) \end{aligned} \quad (C.20)$$

Pendekatan konvensional untuk mekanika kuantum diawali dengan Hamiltonian mekanika klasik yang berhubungan dengan operator-operator yang secara umum tidak komut. Dalam kerangka dinamika kuantum, sistem direpresentasikan oleh persamaan Schrodinger bergantung waktu

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = H |\psi(t)\rangle \quad (C.21)$$

dimana  $H$  adalah operator Hamiltonian sistem. Untuk kasus 1 dimensi Hamiltonian diberikan

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x, t) \quad (C.22)$$

Dalam keadaan stasioner metode separasi variabel memberi  $\psi$

$$\psi(x, t) = \langle x | \psi(t) \rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} \varphi(x) \quad (C.23)$$

Selanjutnya perhatikan evolusi dari  $\phi$ . Misalkan keadaan  $t_1$  dan  $t_2 > t_1$ ,  $\psi(t_1)$ ,  $\psi(t_2)$  dihubungkan oleh operator uniter  $U(t_2, t_1)$  menurut

$$|\psi(t_2)\rangle = U(t_2, t_1) |\psi(t_1)\rangle \quad (C.24)$$

Persamaan Schrodinger (C.21) memberikan

$$U(t_2, t_1) = e^{-\frac{i}{\hbar}(t_2-t_1)H} \quad (C.25)$$



Sesuai dengan definisi keadaan basis persm (C.1) dan (C.18) dapat ditulis

$$\langle x_1 | U(t_2, t_1) | x_2 \rangle = U(t_1, x_1; t_2, x_2) \quad (C.26)$$

Dengan memanfaatkan basis orthonormal yang memenuhi syarat kelengkapan dan informasi tentang operator evolusi waktu, maka fungsi gelombang dapat ditulis

$$\begin{aligned} \psi(x_2, t_2) &= \langle x_2, t_2 | \psi \rangle \\ &= \int dx_1 \langle x_2, t_2 | x_1 \rangle \langle x_1 | \psi \rangle \\ &= \int dx_1 \langle x_2, t_2 | x_1 e^{\frac{i}{\hbar} t_1 H} \rangle \langle e^{-\frac{i}{\hbar} t_1 H} x_1 | \psi \rangle \\ &= \int dx_1 \langle x_2, t_2 | x_1, t_1 \rangle \langle x_1, t_1 | \psi \rangle \\ &= \int dx_1 U(t_2, x_2; t_1, x_1) \psi(x_1, t_1) \end{aligned} \quad (C.27)$$

Dalam gambaran Heisenberg (subskrip H) keadaan basis bersifat tidak bergantung waktu dan terhubung dengan gambaran Schrodinger (subskrip S)

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_H &= |\psi(t=0)\rangle_S = |\psi(t=0)\rangle \\ &= e^{\frac{i}{\hbar} t H} |\psi(t)\rangle \\ &= e^{\frac{i}{\hbar} t H} |\psi(t)\rangle_S \end{aligned} \quad (C.28)$$

dan operator membawa seluruh sifat bergantung waktu. Operator koordinat pada gambaran Heisenberg berhubungan dengan gambaran Schrodinger

$$\hat{O}_H(t) = e^{\frac{i}{\hbar} t H} \hat{O} e^{-\frac{i}{\hbar} t H} \quad (C.29)$$

Keadaan eigen operator ini memenuhi

$$\hat{x}_H(t) |x, t\rangle_H = x |x, t\rangle_H \quad (C.30)$$

bila dihubungkan dengan koordinat basis pada gambaran Schrodinger maka

$$|x, t\rangle_H = e^{\frac{i}{\hbar} t H} |x\rangle \quad (C.31)$$

Untuk  $t_2 > t_1$  maka

$$\begin{aligned} \langle x_2, t_2 | x_1, t_1 \rangle_H &= \langle x_2 | e^{-\frac{i}{\hbar} t_2 H} e^{\frac{i}{\hbar} t_1 H} | x_1 \rangle \\ &= \langle x_2 | e^{-\frac{i}{\hbar} (t_2 - t_1) H} | x_1 \rangle \\ &= \langle x_2 | U(t_2, t_1) | x_1 \rangle \end{aligned} \quad (C.32)$$

Dapat disimpulkan bahwa elemen matriks dari operator evolusi waktu merupakan amplitudo transisi berurut waktu antara keadaan basis koordinat pada gambaran Heisenberg. Dengan demikian

$$\langle x_2, t_2 | x_1, t_1 \rangle_H = U(t_2, x_2; t_1, x_1) \quad (C.33)$$



## LAMPIRAN D

### AMPLITUDO TRANSISI

Telah didefinisikan sebelumnya bahwa pada gambaran Heisenberg (C.31) berlaku

$$|x, t\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}tH} |x\rangle \quad (D.1)$$

dan sekawan hermitnya

$$\langle x, t| = e^{-\frac{i}{\hbar}tH} \langle x| \quad (D.2)$$

Amplitudo transisi yang menghubungkan keadaan awal  $t_i$  dan keadaan akhir  $t_f$

$$U(t_f, x_f; t_i, x_i) = \langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle \quad (D.3)$$

Perhatikan bila interval waktu dari awal  $t_i$  hingga akhir  $t_f$  dibagi dalam sejumlah  $n$  irisan kecil dari  $\Delta t$

$$\frac{t_f - t_i}{n} = \Delta t = \epsilon \quad (D.4)$$

Syarat kelengkapan memberikan

$$\begin{aligned} U(t_f, x_f; t_i, x_i) &= \langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle \\ &= \int dx \langle x_f, t_f | x_1, t_1 \rangle \langle x_1, t_1 | x_i, t_i \rangle \\ &= \int dx_1 dx_2 \langle x_f, t_f | x_2, t_2 \rangle \langle x_2, t_2 | x_1, t_1 \rangle \langle x_1, t_1 | x_i, t_i \rangle \\ &\quad \vdots \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int dx_1 \cdots dx_{n-1} \langle x_f, t_f | x_{n-1}, t_{n-1} \rangle \\ &\quad \times \langle x_{n-1}, t_{n-1} | x_{n-2}, t_{n-2} \rangle \cdots \langle x_1, t_1 | x_i, t_i \rangle \end{aligned} \quad (D.5)$$

Selanjutnya memanfaatkan persm. (C.32) dan syarat kelengkapan basis momentum memberi hubungan bagi irisan ke (j-1) dan j,

$$\begin{aligned} \langle x_j, t_j | x_{j-1}, t_{j-1} \rangle &= \langle x_j | e^{-\frac{i}{\hbar}Ht_j} e^{\frac{i}{\hbar}Ht_{j-1}} | x_{j-1} \rangle \\ &= \langle x_j | e^{-\frac{i}{\hbar}H(t_j - t_{j-1})} | x_{j-1} \rangle \\ &= \langle x_j | e^{-\frac{i}{\hbar}H\tau} | x_{j-1} \rangle \\ &= \int dp_j \langle x_j | p_j \rangle \langle p_j | e^{-\frac{i}{\hbar}H\tau} | x_{j-1} \rangle \\ &= \int \frac{dp_j}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar}p_j x_j} e^{-\frac{i}{\hbar}H\tau} \langle p_j | x_{j-1} \rangle \\ &= \int \frac{dp_j}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar}p_j x_j} e^{-\frac{i}{\hbar}H\tau} e^{-\frac{i}{\hbar}p_j x_{j-1}} \end{aligned} \quad (D.6)$$



Substitusi (D.6) ke (D.5) didapatkan untuk limit  $\rightarrow \infty$ ,

$$\begin{aligned}
U(x_f, t_f; x_i, t_i) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0, n \rightarrow \infty} \int dx_i \dots dx_{n-1} \\
&\times \frac{dp_n}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} p_n (x_n - x_{n-1}) - \frac{i}{\hbar} H\tau(\frac{x_n + x_{n-1}}{2}, p_n)} \\
&\times \frac{dp_{n-1}}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} p_{n-1} (x_{n-1} - x_{n-2}) - \frac{i}{\hbar} H\tau(\frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2}, p_{n-1})} \\
&\vdots \\
&\times \frac{dp_1}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} p_1 (x_1 - x_0) - \frac{i}{\hbar} H\epsilon(\frac{x_1 + x_0}{2}, p_1)} \\
&= \int dx_1 \dots dx_{n-1} \frac{dp_1}{2\pi\hbar} \dots \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \\
&\times e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^n (p_n (x_n - x_{n-1}) - H\epsilon(\frac{x_n + x_{n-1}}{2}, p_n))} \quad (D.7)
\end{aligned}$$

dengan

$$x_0 = x_i \quad x_n = x_f \quad (D.8)$$

Mengingat  $\epsilon \rightarrow 0$  dan  $n \rightarrow \infty$  asumsi dalam suku eksponensial dapat dinyatakan sebagai integral

$$\begin{aligned}
y &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0, n \rightarrow \infty} \frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^n (p_n (x_n - x_{n-1}) - H\epsilon(\frac{x_n + x_{n-1}}{2}, p_n)) \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0, n \rightarrow \infty} \frac{i}{\hbar} \epsilon \sum_{n=1}^n (p_n (\frac{x_n - x_{n-1}}{\epsilon}) - H(\frac{x_n + x_{n-1}}{2}, p_n)) \\
&= \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt (p\dot{x} - H(x, p)) \\
&= \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt L \quad (D.9)
\end{aligned}$$

Integral dalam persm. (D.9) tidak lain adalah aksi, dengan  $L$  Lagrangian

$$S = \int dt L \quad (D.10)$$

Selanjutnya mengingat bentuk umum Hamiltonian

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + V(x) \quad (D.11)$$

maka amplitudo transisi dapat diungkapkan

$$\begin{aligned}
U(t_f, x_f; t_i, x_i) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0, n \rightarrow \infty} \int dx_1 \dots dx_{n-1} \frac{dp_1}{2\pi\hbar} \dots \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \\
&\times e^{\frac{i\epsilon}{\hbar} \sum_{n=1}^n (p_n (\frac{x_n - x_{n-1}}{\epsilon}) - \frac{p_n^2}{2m} - V(\frac{x_n + x_{n-1}}{2}))} \quad (D.12)
\end{aligned}$$



Integrasi terhadap momentum dari amplitudo transisi di atas adalah integral Gaussian

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dp_n}{2\pi\hbar} e^{-\frac{i\epsilon}{\hbar} \left( \frac{p_n^2}{2m} - \frac{p_n(x_n - x_{n-1})}{\epsilon} \right)} &= \int \frac{dp_n}{2\pi\hbar} e^{-\frac{i\epsilon}{2m\hbar} \left( p_n^2 - \frac{2mp_n(x_n - x_{n-1})}{\epsilon} \right)} \\
 &= \int \frac{dp_n}{2\pi\hbar} e^{-\frac{i\epsilon}{2m\hbar} \left[ \left( p_n - \frac{m(x_n - x_{n-1})}{\epsilon} \right)^2 - \left( \frac{m(x_n - x_{n-1})}{\epsilon} \right)^2 \right]} \\
 &= \frac{1}{2\pi\hbar} \left( \frac{2\pi m\hbar}{i\epsilon} \right)^{1/2} e^{\frac{im\epsilon}{2\hbar} \left( \frac{x_n - x_{n-1}}{\epsilon} \right)^2} \\
 &= \left( \frac{m}{2\pi i\hbar\epsilon} \right)^{1/2} e^{\frac{im\epsilon}{2\hbar} \left( \frac{x_n - x_{n-1}}{\epsilon} \right)^2} \quad (D.13)
 \end{aligned}$$

Dengan demikian amplitudo transisi  $U(t_f, x_f; t_i, x_i)$  menjadi

$$\begin{aligned}
 U(t_f, x_f; t_i, x_i) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0, n \rightarrow \infty} \left( \frac{m}{2\pi i\hbar\epsilon} \right)^{n/2} \int dx_1 \dots dx_{n-1} \\
 &\quad \times e^{\frac{i\epsilon}{\hbar} \sum_{n=1}^n \left( \frac{m}{2} \left( \frac{x_n - x_{n-1}}{\epsilon} \right)^2 - V \left( \frac{x_n + x_{n-1}}{2} \right) \right)} \\
 &= \left( \frac{m}{2\pi i\hbar\epsilon} \right)^{n/2} \int dx_1 \dots dx_{n-1} e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \left( \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x) \right)} \\
 &= A \int Dx e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \left( \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x) \right)} \\
 &= A \int Dx e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt L} \\
 &= A \int Dx e^{\frac{i}{\hbar} S[x]} \quad (D.14)
 \end{aligned}$$

Konstanta  $A = \left( \frac{m}{2\pi i\hbar\epsilon} \right)^{n/2}$  dan

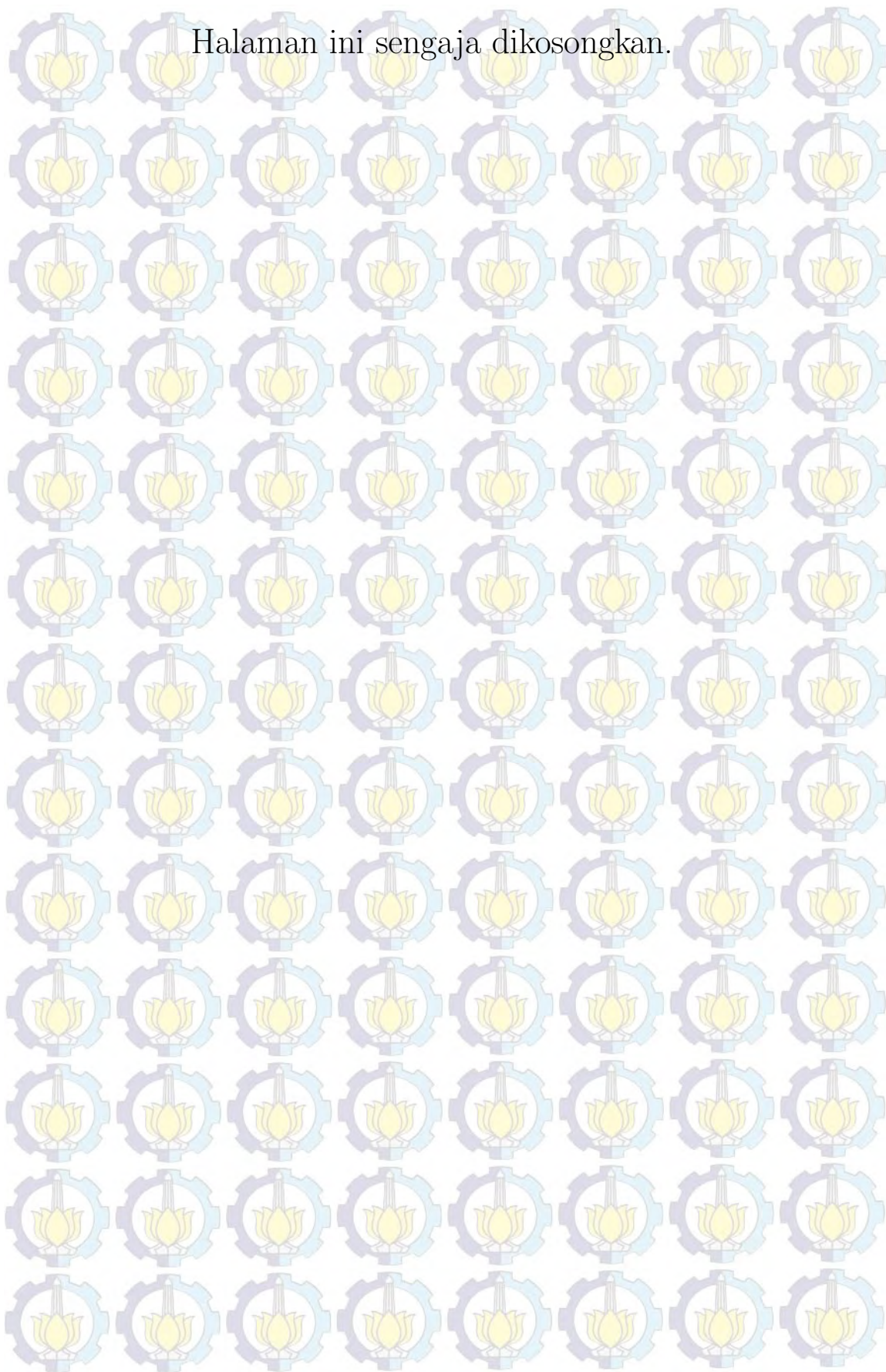
$$\int Dx = \int dx_1 \dots dx_{n-1} \quad (D.15)$$

disebut Measure (ukuran).

Integral lintas Feynman secara ringkas mengungkapkan amplitudo transisi dari keadaan awal ke keadaan akhir, dimana proses ini dapat dilakukan dengan tak berhingga lintasan yang mungkin dan masing-masing lintasan mempunyai bobot  $e^{\frac{i}{\hbar} S[x]}$ .



Halaman ini sengaja dikosongkan.





## LAMPIRAN E

### PARTIKEL BEBAS

Pada subbab ini, menerangkan penerapan dari perumusan integral lintas di awal pada sistem paling sederhana yakni partikel bebas. Lagrangian partikel bebas hanya terdiri dari energi kinetik yaitu

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad (\text{E.1})$$

Amplitudo transisi sistem, menurut persm (D.14)

$$\begin{aligned} U(t_f, x_f; t_i, x_i) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0, N \rightarrow \infty} \left( \frac{m}{2\pi i \hbar \epsilon} \right)^{N/2} \int dx_1 \dots dx_{N-1} e^{\frac{i}{\hbar} \epsilon \sum_{n=1}^N \frac{m}{2} \left( \frac{x_n - x_{n-1}}{\epsilon} \right)^2} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0, N \rightarrow \infty} \left( \frac{m}{2\pi i \hbar \epsilon} \right)^{N/2} \int dx_1 \dots dx_{N-1} e^{\frac{im}{2\epsilon \hbar} \sum_{n=1}^N (x_n - x_{n-1})^2} \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

Pergantian Variabel

$$y_n = \left( \frac{m}{2\hbar \epsilon} \right)^{1/2} x_n \quad (\text{E.3})$$

memberikan

$$\begin{aligned} U(t_f, x_f; t_i, x_i) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0, N \rightarrow \infty} \left( \frac{m}{2\pi i \hbar \epsilon} \right)^{N/2} \left( \frac{2\hbar \epsilon}{m} \right)^{\frac{N-1}{2}} \\ &\quad \times \int dy_1 \dots dy_{N-1} e^{i \sum_{n=1}^N (y_n - y_{n-1})^2} \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

Selanjutnya, evaluasi bagian demi bagian dari eksponensial integral Gaussian di atas akan membentuk pola sebagai berikut. Pertama, satu integran

$$\begin{aligned} \int dy_1 e^{i((y_1 - y_0)^2 + (y_2 - y_1)^2)} &= \int dy_1 e^{i\left(2\left(y_1 - \frac{y_0 + y_2}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}(y_2 - y_0)^2\right)} \\ &= \int dy_1 e^{2i\left(y_1 - \frac{y_0 + y_2}{2}\right)^2} e^{\frac{i}{2}(y_2 - y_0)^2} \\ &= \left( \frac{i\pi}{2} \right)^{1/2} e^{\frac{i}{2}(y_2 - y_0)^2} \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$



Kedua, dua integran

$$\begin{aligned}
 \int dy_1 dy_2 e^{i((y_1-y_0)^2+(y_2-y_1)^2+(y_3-y_2)^2)} &= \left(\frac{i\pi}{2}\right)^{1/2} \int dy_2 e^{i(\frac{1}{2}(y_2-y_0)^2+(y_3-y_2)^2)} \\
 &= \left(\frac{i\pi}{2}\right)^{1/2} \int dy_2 e^{i(\frac{3i}{2}(y_2-\frac{y_0+2y_3}{3})^2+\frac{i}{3}(y_3-y_0)^2)} \\
 &= \left(\frac{i\pi}{2}\right)^{1/2} \left(\frac{2i\pi}{3}\right)^{1/2} e^{\frac{i}{3}(y_3-y_0)^2} \\
 &= \left(\frac{(i\pi)^2}{3}\right)^{1/2} e^{\frac{i}{3}(y_3-y_0)^2} \quad (E.6)
 \end{aligned}$$

dan seterusnya. Dari pola di atas  $(N-1)$  integrasi akan memberikan

$$\begin{aligned}
 U(t_f, x_f; t_i, x_i) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0, N \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \epsilon}\right)^{N/2} \left(\frac{2\hbar \epsilon}{m}\right)^{\frac{N-1}{2}} \left(\frac{(i\pi)^{N-1}}{N}\right)^{1/2} e^{\frac{i}{N}(y_N-y_0)^2} \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0, N \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \epsilon}\right)^{N/2} \left(\frac{2\pi i \hbar \epsilon}{m}\right)^{\frac{N-1}{2}} \frac{1}{\sqrt{N}} e^{\frac{im}{2\hbar N \epsilon}(x_N-x_0)^2} \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0, N \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2\pi i \hbar N \epsilon}\right)^{1/2} e^{\frac{im}{2\hbar N \epsilon}(x_f-x_i)^2} \\
 &= \left(\frac{m}{2\pi i \hbar (t_f-t_i)}\right)^{1/2} e^{\frac{i}{\hbar} \frac{m(x_f-x_i)^2}{2(t_f-t_i)}} \quad (E.7)
 \end{aligned}$$

Diperkenalkan aksi partikel bebas

$$S[x] = \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad (E.8)$$

memenuhi persamaan Euler-Lagrange

$$\frac{\delta S[x]}{\delta x(t)} = m\ddot{x} = 0 \quad (E.9)$$

Konsekuensinya

$$\dot{x}_{ab}(t) = \nu = \text{konstan} \quad (E.10)$$

Dengan demikian aksi klasik

$$S[x_{ab}] = \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{1}{2} m \dot{x}_{ab}^2 = \frac{1}{2} m \nu^2 (t_f - t_i) \quad (E.11)$$

karena  $\nu$  konstan, maka  $x_f - x_i = \nu(t_f - t_i)$  atau

$$\nu = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} \quad (E.12)$$



Substitusi ke dalam persm (F.11) menghasilkan

$$\begin{aligned} S[x_{ab}] &= \frac{1}{2}m \left( \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} \right)^2 (t_f - t_i) \\ &= \frac{m (x_f - x_i)^2}{2 (t_f - t_i)} \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

Jelas bahwa amplitudo transisi kuantum partikel bebas

$$U(t_f, x_f; t_i, x_i) = \left( \frac{m}{2\pi i \hbar (t_f - t_i)} \right)^{1/2} e^{\frac{i}{\hbar} S[x_{ab}]} \quad (\text{E.14})$$



Halaman ini sengaja dikosongkan.

